



# Modélisation multi-physique en génie électrique. Application au couplage magnéto-thermo-mécanique

Antoine Journeaux

## ► To cite this version:

Antoine Journeaux. Modélisation multi-physique en génie électrique. Application au couplage magnéto-thermo-mécanique. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112209 . tel-00920289

**HAL Id: tel-00920289**

**<https://theses.hal.science/tel-00920289>**

Submitted on 18 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : STITS (ED 422)  
Laboratoire de Génie Électrique de Paris (LGEP)

DISCIPLINE : Physique

**THÈSE DE DOCTORAT**

soutenue le 18/11/2013

par

**Antoine A. JOURNEAUX**

Modélisation multi-physique en génie électrique  
Application au couplage magnéto-thermo-mécanique.

**Directeur de thèse :** Frédéric BOUILLAUT Professeur (LGEP, Gif-sur-Yvette)  
**Encadrant de thèse :** Jean-Yves ROGER Ingénieur chercheur (EDF R&D, Clamart)

**Composition du jury :**

Rapporteurs :	Yves MARECHAL	Professeur (G2ELAB, Grenoble)
	Zhuoxiang REN	Professeur (L2E, Paris)
Examineurs :	Francis PIRIOU	Professeur (L2EP, Lille), président du jury
	Olivier. MOREAU	Ingénieur Chercheur (EDF R&D, Clamart)
Directeur de Thèse :	Frédéric BOUILLAUT	Professeur (LGEP, Gif-sur-Yvette)
Encadrant :	Jean-Yves ROGER	Ingénieur Chercheur (EDF R&D, Clamart)



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit n'aurait pu être achevé sans le support constant d'un grand nombre de personnes. Je tiens en ces quelques lignes à leur adresser mes plus sincères remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier Frédéric BOUILLAUT, mon directeur de thèse, qui après une rencontre fortuite dans les couloirs de Supélec a accepté de m'accueillir au LGEP. Ses conseils ont été d'une grande utilité durant ces trois ans, j'ai tant appris à ses côtés.

Vient immédiatement après Jean-Yves ROGER, mon encadrant à EDF R&D. Après m'avoir accepté en tant que stagiaire de mastère, qui aurait pu imaginer que cela durerait quatre années et j'espère que cela continue. Merci aussi pour ta patience sans limite, je ne sais pas si elle a été acquise lors de tes nombreux voyages, elle est exemplaire. Merci encore pour tes nombreuses applications numériques dont certaines sont présentées dans ce manuscrit.

Je tiens aussi à remercier Olivier MOREAU (avec qui j'ai survécu au Fugu), Natacha BEREUX, l'équipe d'IMACS, Mathieu CORUS et Jean-Pierre DUCREUX auprès desquels j'ai beaucoup appris. Merci au reste du département THEMIS d'EDF R&D pour leur accueil et leur bonne humeur. Merci aussi à Pierre THOMAS pour ses nombreuses discussions fondamentales.

Ce travail intervient aussi sans le cadre du LAMEL, laboratoire auquel est associé l'équipe du L2EP. Je remercie donc cette équipe, à laquelle appartiennent entre autres Francis PIRIOU, Thomas HENNERON, Stéphane CLÉNET, Yvonnick LE MÉNACH.

Merci aussi à Yves MARÉCHAL et Zhuoxiang REN d'avoir accepté d'être mes rapporteur et d'avoir attentivement relu un (très) long manuscrit. Merci aussi aux autres membres de mon jury.

Il faut reconnaître qu'au delà des considérations scientifiques intervient l'environnement quotidien. Ainsi je tiens à remercier toute l'équipe du LGEP pour leur accueil. Je tiens particulièrement à remercier Valentin PRÉAULT, Olivier HUBERT, Laurent SANTANDRÉA et plus généralement toute l'équipe MOCOSEM.

Merci à ma famille et mes amis (leur présence m'a touchée), merci à mon oncle, ma tante et Matthieu pour la préparation de la soutenance. À ma mère pour son

efficacité inégalable.

Enfin merci à Marie, son aide ne saurait être décrite en ces quelques lignes.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
<b>I Modélisation des problèmes multi-physiques</b>	<b>19</b>
<b>1 Intérêt des expressions intégrées des équations de la physique</b>	<b>23</b>
1.1 Introduction, les expressions classiques . . . . .	24
1.2 Problèmes liés aux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	25
1.2.1 Formes intégrées des équations de la physique . . . . .	25
1.2.2 Rupture de symétrie des équations de Maxwell . . . . .	26
1.3 Vers les formes différentielles . . . . .	27
<b>2 Formes différentielles</b>	<b>29</b>
2.1 Rappels . . . . .	30
2.1.1 Définitions . . . . .	30
2.1.2 Variétés différentiables . . . . .	31
2.1.3 Vecteur tangent, espace vectoriel tangent . . . . .	32
2.1.4 Covecteurs . . . . .	34
2.1.5 Formes linéaires alternées . . . . .	34
2.1.6 Formes différentielles . . . . .	35
2.2 Lien avec le monde réel . . . . .	35
2.3 Outils de base . . . . .	36
2.3.1 Produit extérieur . . . . .	37
2.3.2 Produit intérieur . . . . .	37

2.3.3	Différentielle extérieure . . . . .	38
2.3.4	Théorème de Stokes . . . . .	39
2.3.5	Trace . . . . .	39
2.3.6	Opérateur de Hodge . . . . .	39
2.3.7	Dérivée de Lie . . . . .	39
2.3.8	Lemme de Poincaré . . . . .	40
2.4	Application à la physique . . . . .	40
2.4.1	Cas de la dimension 3 . . . . .	40
2.4.2	Formules utiles . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Modélisation des phénomènes physiques</b>	<b>43</b>
3.1	Modélisation des phénomènes thermiques . . . . .	44
3.2	Modélisation des phénomènes mécaniques . . . . .	45
3.3	Modélisation des phénomènes magnétiques . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Formulations discrètes</b>	<b>51</b>
4.1	Espaces et outils fondamentaux . . . . .	52
4.2	Discrétisation, complexe de Whitney . . . . .	55
4.2.1	Élément de Lagrange . . . . .	55
4.2.2	Élément de Nédélec . . . . .	56
4.2.3	Élément de Raviart–Thomas . . . . .	57
4.2.4	Élément de volume . . . . .	58
4.2.5	Discrétisation des opérateurs différentiels . . . . .	59
4.2.6	Maillage dual . . . . .	60
4.3	Interprétation de la discrétisation . . . . .	61
4.3.1	Premier exemple . . . . .	61
4.3.2	Hodge de Galerkin, application à la magnétostatique . . . .	62
4.3.3	Cas de la FIT . . . . .	63
4.4	Equations matricielles des systèmes physiques . . . . .	63
4.4.1	Modèle thermique discret . . . . .	63

4.4.2	Modèle mécanique discret . . . . .	64
4.4.3	Modèle magnétique discret . . . . .	64

## **II Prise en compte des inducteurs bobinés de géométrie complexe** **69**

<b>1</b>	<b>Construction de la densité de courant source</b>	<b>73</b>
1.1	Formules analytiques . . . . .	75
1.2	Résolution électrocinétique . . . . .	78
1.3	Méthode des isopotentielles . . . . .	79
1.3.1	Description de la méthode . . . . .	79
1.3.2	Application numérique . . . . .	82
1.3.3	Conclusions . . . . .	84
1.4	Calcul explicite des sections . . . . .	84
1.4.1	Description de la méthode . . . . .	84
1.4.2	Application numérique . . . . .	88
1.5	Conclusion . . . . .	90
<b>2</b>	<b>Annulation de la divergence de la densité de courant source</b>	<b>93</b>
2.1	Méthode d'arbre . . . . .	95
2.2	À l'aide d'un potentiel vecteur . . . . .	99
2.2.1	Méthode utilisée . . . . .	99
2.2.2	Application au cas de la bobine étroite . . . . .	100
2.2.3	Remarques . . . . .	102
2.3	Moindres carrés sous contraintes . . . . .	102
2.3.1	Principe de la méthode . . . . .	102
2.3.2	Application aux changements de section . . . . .	106
2.4	Remarques générales . . . . .	108
<b>3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>109</b>



3.1	Tube courbé à changement de section . . . . .	110
3.2	Application à un inducteur complet de tête de bobine . . . . .	112
<b>III</b>	<b>Calcul de forces en électromagnétisme</b>	<b>117</b>
<b>1</b>	<b>Origine et calcul des énergies</b>	<b>121</b>
1.1	Introduction . . . . .	122
1.2	Principes énergétiques . . . . .	122
1.2.1	Fonctions convexes en dualité . . . . .	123
1.2.2	Lien entre énergie et loi de comportement . . . . .	123
1.2.3	Bilan de puissance, expression des forces . . . . .	125
1.2.4	Expression énergétique de la force, lien avec d'autres méthodes	127
<b>2</b>	<b>Méthodes de calcul des forces</b>	<b>129</b>
2.1	Forces de Laplace . . . . .	130
2.2	Méthode de Urankar . . . . .	131
2.3	Méthode des travaux virtuels . . . . .	131
2.3.1	Expression intégrale de l'énergie . . . . .	132
2.3.2	Cas des matériaux non linéaires ou magnétostrictifs . . . . .	135
2.3.3	Application de la méthode des travaux virtuels aux aimants	136
<b>3</b>	<b>Comparaison numérique des méthodes</b>	<b>137</b>
3.1	Description des cas tests . . . . .	138
3.1.1	Cas d'une spire circulaire à section carrée . . . . .	138
3.1.2	Cas d'une barre parcourue par un courant uniforme . . . . .	139
3.1.3	Cas de la sphère pleine . . . . .	140
3.2	Résultats obtenus . . . . .	141
3.2.1	Généralités . . . . .	141
3.2.2	Résultats pour la spire . . . . .	142
3.2.3	Résultats pour le cube . . . . .	143

3.2.4	Résultats pour la sphère . . . . .	143
3.3	Conclusion . . . . .	144

## **IV Méthodes de projections 145**

### **1 Méthodes de transferts 151**

1.1	Problématique . . . . .	152
1.2	Interpolation . . . . .	153
1.2.1	Principe de base . . . . .	153
1.2.2	Estimation de l'erreur . . . . .	153
1.2.3	Conclusion . . . . .	154
1.3	Projection Orthogonale – Méthode de Galerkin . . . . .	155
1.3.1	Méthode générale . . . . .	155
1.3.2	Minimisation $\mathcal{L}^2$ . . . . .	157
1.3.3	Minimisation de Sobolev . . . . .	158
1.3.4	Semi-normes en opérateurs différentiels . . . . .	159
1.4	Projection Conservative . . . . .	160
1.4.1	Cas des nœuds . . . . .	160
1.4.2	Cas des arêtes et des faces . . . . .	161

### **2 Comparaison des méthodes de transfert 163**

2.1	Précision de la transmission de champ . . . . .	164
2.1.1	Méthode utilisée . . . . .	164
2.1.2	Éléments finis nodaux (éléments de Lagrange) . . . . .	168
2.1.3	Éléments finis d'arêtes (éléments de Nédélec) . . . . .	171
2.1.4	Éléments finis de faces (éléments de Raviart–Thomas) . . . . .	174
2.1.5	Éléments finis de volume . . . . .	176
2.1.6	Conclusion . . . . .	178
2.2	Étude de convergence en finesse de maillage . . . . .	178
2.2.1	Raffinement uniforme des deux maillages . . . . .	179

2.2.2	Variations simultanées des deux maillages . . . . .	182
<b>3</b>	<b>Calcul des intersections entre maillages</b>	<b>187</b>
3.1	Localisation d'un point dans un maillage . . . . .	188
3.1.1	Appartenance d'un point à un élément . . . . .	188
3.1.2	Recherche efficace d'éléments . . . . .	190
3.1.3	Conclusion . . . . .	194
3.2	Calcul des intersections . . . . .	195
3.2.1	Liste des points d'intersections . . . . .	195
3.2.2	Intersection face/face . . . . .	197
3.2.3	Reconstruction tétraédrique des intersections . . . . .	201
3.3	Sensibilité par rapport aux tests de réels . . . . .	203
3.4	Étude en coût de calcul . . . . .	204
<b>4</b>	<b>Méthodes sans calcul des intersections</b>	<b>207</b>
4.1	Quadratures fixes . . . . .	208
4.2	Intégration adaptative . . . . .	208
4.2.1	Principe . . . . .	208
4.2.2	Résultat numérique . . . . .	210
4.3	Parallélisation . . . . .	213
4.4	Conclusion . . . . .	213
<b>V</b>	<b>Applications industrielles</b>	<b>217</b>
<b>1</b>	<b>Schémas génériques de couplages</b>	<b>221</b>
1.1	Couplage Magnéto-mécanique . . . . .	222
1.1.1	Modèle général pour le couplage magnéto-mécanique . . . . .	222
1.1.2	Hypothèses simplificatrices magnétiques . . . . .	225
1.1.3	Hypothèses simplificatrices de remaillage . . . . .	225
1.1.4	Pré-traitement des forces . . . . .	228

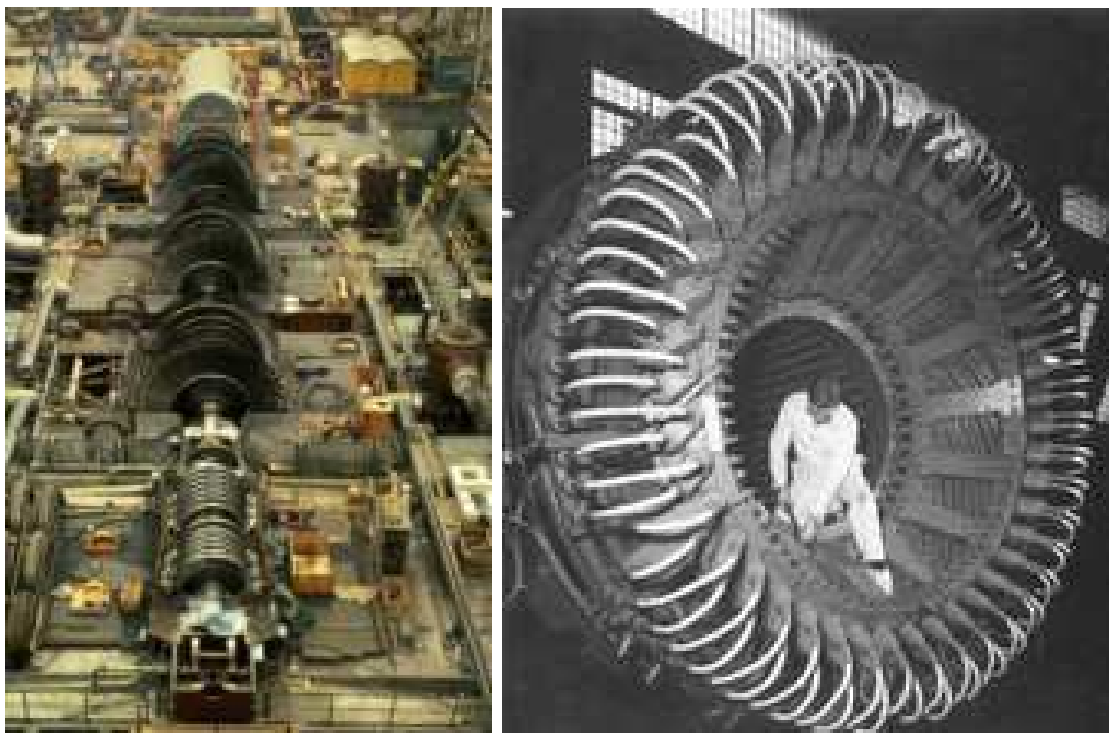
<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	11
1.1.5 Comparaison numérique des méthodes . . . . .	229
1.1.6 Cas tests utilisés . . . . .	231
1.1.7 Résultats de calculs . . . . .	234
1.1.8 Mécanique avec mouvement . . . . .	235
1.1.9 Perspective : couplage fort multi-maillages . . . . .	242
1.2 Couplage Magnéto-thermique . . . . .	244
1.2.1 Principe . . . . .	244
1.2.2 Cas test analytique . . . . .	245
1.3 Couplage magnéto-thermo-mécanique . . . . .	247
1.3.1 Principe . . . . .	247
1.3.2 Cas test statique . . . . .	248
1.3.3 Exemple dynamique . . . . .	251
<b>Conclusion générale</b>	<b>259</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>265</b>
<b>A Influence de la distribution du courant sur les contraintes mécaniques</b>	<b>265</b>
<b>B Application de la méthode des travaux virtuels</b>	<b>267</b>
B.1 Discrétisation . . . . .	267
B.2 Dérivation de la Jacobienne . . . . .	268
B.2.1 Cas de la coénergie magnétique . . . . .	268
B.2.2 Cas de l'énergie magnétique . . . . .	271
B.2.3 Au sujet des rotationnels et des fonctions d'interpolations . .	272
<b>C Application de la méthode des travaux virtuels aux aimants</b>	<b>273</b>
C.1 Calcul de forces dans les aimants . . . . .	273
C.1.1 Généralités sur les aimants . . . . .	273

C.1.2	Formulations avec aimants . . . . .	274
C.1.3	Puissances virtuelles et aimants . . . . .	275
C.1.4	Expressions des énergies . . . . .	277
C.2	Tests numériques . . . . .	279
C.2.1	Aimants face à face . . . . .	280
C.2.2	Déformations issues du calcul de forces locales . . . . .	282
<b>D</b>	<b>Calcul analytique des efforts magnétiques</b>	<b>283</b>
D.1	Méthode de l'image . . . . .	283
D.2	Application des méthodes analytiques aux cages de développantes .	283
D.3	Points singuliers des équations de Urankar . . . . .	283
<b>E</b>	<b>Calcul des énergies dans les aimants</b>	<b>287</b>
E.1	Expression 1 . . . . .	287
E.1.1	Calcul des intégrales . . . . .	288
E.2	Expression 2 . . . . .	289
E.2.1	Calcul des intégrales . . . . .	289
<b>F</b>	<b>Phénomène de Gibbs et lissage <math>\mathcal{H}^1</math></b>	<b>293</b>
F.1	Oscillations locales . . . . .	293
F.2	Choix de la constante de Sobolev . . . . .	294
<b>G</b>	<b>Listes des figures, tableaux, algorithmes et abréviations</b>	<b>297</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>319</b>

# Introduction générale



La production d'électricité requiert, pour la plupart des procédés utilisés, une conversion électro-mécanique réalisée par des alternateurs (voir figure 1). Les plus grandes puissances sont généralement mises en jeu par les centrales nucléaires et thermiques, et plus récemment dans les grands ouvrages hydrauliques. Ces machines utilisent des champs et courants alternatifs dont la présence simultanée engendre des forces responsables de la vibration des structures.



**FIGURE 1 – Gauche :** Partie tournante d'un turbo-alternateur. Au premier plan, les turbines haute pression puis les turbines basse pression. L'alternateur est en bout d'arbre, fermé. (Crédit : EDF SA) **Droite :** Extrémité statorique d'un turbo-alternateur, les développantes sont visibles sous la structure de serrage, la connexion avec le circuit de refroidissement est en blanc. (Crédit : SIEMENS AG)

Depuis les années 1920 (LAMBRECHT 1986), les puissances massiques des alternateurs sont passées de  $0,3 \text{ kVA} \cdot \text{kg}^{-1}$  à près de  $3 \text{ kVA} \cdot \text{kg}^{-1}$ , soumettant de fait les structures à des contraintes mécaniques de plus en plus importantes. En France, la plupart des grands alternateurs sont opérés par EDF et sont issus du développement du parc nucléaire. Les alternateurs en fonctionnement de 900 MW sont issus des paliers « CP1 » et « CP2 » lancés entre 1974 et 1976 (centrales de



Blayais, Dampierre, Gravelines, Tricastin, Chinon...) et leur mise en service date du début des années 1980. Les alternateurs de 1300 MW sont issus du palier « P4 » et ont été construits à la fin des années 1980 pour une mise en service au début des années 1990. Enfin, le palier « N4 » (centrales de Chooz, Civaux), regroupe les alternateurs de 1400 MW et représente les machines les plus récentes actuellement exploitées.

La demande croissante en énergie électrique combinée à une faible croissance des moyens de production et l'arrivée en fin de cycle des ouvrages existant rendent la problématique de disponibilité des alternateurs de plus en plus importante.

Les sujets liés à l'étude du vieillissement des alternateurs existants et à leur modélisation sont de plus en plus nombreux à EDF R&D. Cette thèse se concentre sur la modélisation d'une sous-structure des alternateurs, appelée « cage de développantes », constituée des extrémités des conducteurs statoriques (présentés en figure 1). Les efforts mécaniques liés à la présence de champ et de courant peut engendrer par exemple une usure prématurée des isolants des conducteurs, une dé-cohésion possible de la structure des conducteurs ou des problèmes liés au refroidissement (connexion des « boîtes à eau », visibles au premier plan de la figure 1, droite).

## Problèmes liés à la modélisation

La structure de « cage de développantes » demande tout d'abord de savoir représenter une structure complexe liée à la forme des inducteurs (développante de cône) ainsi que la présence d'autres éléments de la machine. La modélisation à l'aide de l'outil de calcul de magnétisme « `Code_Carmel3D` » (co-développé par EDF R&D, l'USTL et l'ENSAM) n'a pas pu être immédiate car il faut savoir représenter les courants de manière correcte. Afin d'obtenir une bonne précision sur les grandeurs magnétiques, nous avons dû nous intéresser aux méthodes de calcul de forces à développer permettant de calculer les efforts présents dans ce type de structure.

De part l'existence d'outils éprouvés pour l'étude des problèmes de mécanique (`Code_Aster`) et de magnétisme (`Code_Carmel3D`), il a fallu s'interroger sur la manière de faire travailler ces outils ensemble afin de modéliser de manière correcte les problèmes magnéto-mécaniques.

## Introduction de la démarche utilisée

Cette thèse aborde les développements réalisés pour le calcul des problèmes magnéto-thermo-mécaniques, multi maillages, résolus à l'aide de plusieurs codes. Cette étude a été menée dans le cadre d'une collaboration avec EDF avec pour objectif la modélisation de la structure des cages de développantes. Nous commençons par présenter dans la première partie les outils nécessaires à la modélisation des problèmes physiques. Une seconde partie montre comment la répartition particulière des courants a été imposée dans `Code_Carmel3D`. La troisième partie a pour but de déterminer une approche correcte pour le calcul des forces locales en électromagnétisme. La modélisation des problèmes multi-physiques à l'aide de multiples codes et de multiples maillages est abordée dans la quatrième partie au travers de l'étude des transferts de solutions entre maillages. Enfin la dernière partie est dédiée à l'élaboration et aux tests de schémas génériques permettant l'étude de diverses classes de problèmes multi-physiques.

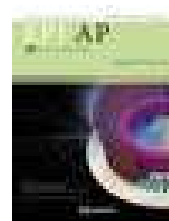
## Articles de revues issus de ce travail

### *Article invité*

---

1. **A. A. Journeaux**, F. Bouillault & J.-Y. Roger, “Multi-physics problems computation using numerically adapted meshes: application to magneto-thermo-mechanical systems”, *The European Physical Journal – Applied Physics*, **61**, 30001 (2013)

PREMIÈRE DE COUVERTURE



### *Revue à comité de lecture*

---

2. **A. A. Journeaux**, F. Bouillault & J.-Y. Roger, “Magneto-Mechanical Dynamic System Modelling Using Computer Code Chaining and Field Projections”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, **49**, 1757 - 1760 (2013)
3. **A. A. Journeaux**, A. Bossavit & F. Bouillault, “Relevance of magnetic behaviour in the modelling of electro-mechanical systems”, *The European Physical Journal – Applied Physics*, accessible en ligne (2013)
4. **A. A. Journeaux**, N. Nemitz, O. Moreau, “Locally conservative projection methods: Practical implementation and application to a magneto-thermal chaining”, *Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, the International Journal for* (2013)
5. **A. A. Journeaux**, F. Bouillault & J.-Y. Roger, “Reducing the cost of mesh-to-mesh data transfer”, *Magnetics, IEEE Transactions on* (2013)
6. **A. A. Journeaux**, F. Bouillault & O. Moreau, “Turbo generators end windings magneto-mechanical analysis using a fully analytic magnetic model.”, *Magnetics, IEEE Transactions on* (2013)

### *Article soumis*

---

7. **A. A. Journeaux**, “Multi-physics simulations using single-physics software and generic coupling”, proceeding of *Young Researcher in Electrical Engineering* (2013)

# PREMIÈRE PARTIE

## Modélisation des problèmes multi-physiques



# Introduction

La modélisation des systèmes électriques, et plus particulièrement des cages de développantes, requièrent souvent l'utilisation de modèles physiques de différentes natures. Dans le cadre de ce travail de thèse, les systèmes étudiés peuvent coupler la thermique, la mécanique et l'électromagnétisme. Chacune de ces physiques est approchée à l'aide d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, pour lesquelles le choix des inconnues est important. Dans le cadre de modèles couplés, il faut pouvoir exprimer les liens entre les différentes physiques à partir des grandeurs exprimables pour chacune d'entre elles. Une bonne connaissance des modèles et de leurs expressions est alors nécessaire.

Ce chapitre se propose de présenter chacune de ces trois physiques (thermique, mécanique et électromagnétisme) et les liens considérés. L'approche choisie est toutefois différente de la présentation classique des équations et de leurs discrétisations. Nous commencerons par montrer que, en pratique, les formes intégrées des équations de la physique sont particulièrement utiles. Nous introduirons ensuite la notion de forme différentielle, liant champ et intégrale élémentaires. Les outils de base seront alors brièvement présentés. Les trois physiques seront par la suite passées en revue, et leurs formulations seront développées sous forme différentielle parallèlement à l'approche classique. La dernière partie s'intéressera à la discrétisation des équations, et aux liens qu'il existe entre les méthodes numériques, les matrices et les formes différentielles.



# Chapitre 1

## Intérêt des expressions intégrées des équations de la physique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction, les expressions classiques . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>1.2</b>	<b>Problèmes liés aux champs de vecteurs de <math>\mathbb{R}^3</math> . . . . .</b>	<b>25</b>
1.2.1	Formes intégrées des équations de la physique . . . . .	25
1.2.2	Rupture de symétrie des équations de Maxwell . . . . .	26
<b>1.3</b>	<b>Vers les formes différentielles . . . . .</b>	<b>27</b>

---



## 1.1 Introduction, les expressions classiques

La représentation des phénomènes de la physique est la plupart du temps gouvernée par des équations liant des grandeurs locales. Pour les problèmes de thermique linéaire, l'équation de la chaleur permet de représenter les variations locales de température :

$$-\operatorname{div} \Phi + p = \rho C_p \partial_t T. \quad (1.1)$$

$\Phi$  est le flux de chaleur orienté dans la direction des températures décroissantes (en  $\text{W.m}^{-2}$ ),  $p$  représente les sources locales de chaleur ( $\text{W.m}^{-3}$ ),  $\rho C_p$  est la capacité thermique à pression constante ( $\text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ ) et  $T$  est la température (K).

Pour la mécanique, nous pouvons citer la formulation locale du principe fondamental de la dynamique :

$$\operatorname{div} \sigma + f = \rho \partial_t^2 u, \quad (1.2)$$

où  $\sigma$  (Pa) est le tenseur des contraintes,  $f$  (N) sont les forces extérieures et  $u$  (m) est le déplacement.

De même, pour le magnétisme, les équations de Maxwell régissent le comportement des champs magnétiques et des charges à l'aide des équations dites de Maxwell–Faraday et de Maxwell–Ampère :

$$\operatorname{rot} E = -\partial_t B \quad (\text{Maxwell–Faraday}), \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} H = J + \partial_t D \quad (\text{Maxwell–Ampère}), \quad (1.4)$$

avec  $E$  ( $\text{V.m}^{-1}$ ) le champ électrique,  $B$  (T) l'induction magnétique,  $H$  ( $\text{A.m}^{-1}$ ) le champ magnétique,  $D$  ( $\text{C.m}^{-2}$ ) l'induction électrique, et  $J$  ( $\text{A.m}^{-2}$ ) la densité de courant. À ces deux équations doivent être ajoutées des lois de conservation :

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} B = 0^1. \quad (1.6)$$

Pour les trois physiques, il est nécessaire d'ajouter aux équations précédentes des lois de comportement. Nous reviendrons sur ce point lors de la description complète des modèles. Dans chaque cas, les lois mettent en jeu des grandeurs vectorielles locales, décrites comme des grandeurs « élaborées », pouvant décrire les phénomènes avec le moins d'ambiguïté possible (FOURNET 1993). Cependant, il est possible d'écrire ces équations sous une forme encore plus générale.

## 1.2 Problèmes liés aux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

### 1.2.1 Formes intégrées des équations de la physique

Nous allons voir que, à partir de ces grandeurs locales, les phénomènes physiques font la plupart du temps intervenir des expressions intégrées des équations de la physique. De même, les grandeurs généralement mesurables sont elles-mêmes des grandeurs intégrées (force, puissance thermique, tension, courant...). Prenons chacune des expressions vues au paragraphe 1.1, pour exemple, et intégrons sur un volume supposé quelconque  $\mathcal{D}_{qcq}$  (fermé). L'équation de base de la chaleur devient, après application du théorème de Green–Ostrogradski :

$$-\int_{\partial\mathcal{D}_{qcq}} \Phi \cdot n + \int_{\mathcal{D}_{qcq}} p = \int_{\mathcal{D}_{qcq}} \rho C_p \partial_t T, \quad (1.7)$$

①                      ②                      ③

ayant un sens plus physique et pouvant se traduire par « *la somme de la puissance thermique apportée ① et de la puissance thermique produite ② servent à faire varier la température ③* ».

Si on se sert de la signification physique du tenseur des contraintes, l'équation fondamentale de la dynamique peut être mise sous la forme d'un principe fondamental de la dynamique classique :

$$\int_{\mathcal{D}_{qcq}} \operatorname{div} \sigma + \int_{\mathcal{D}_{qcq}} f = \int_{\mathcal{D}_{qcq}} \rho \partial_t^2 u, \quad (1.8a)$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}_{qcq}} \vec{T} + \int_{\mathcal{D}_{qcq}} f \approx \partial_t^2 u \int_{\mathcal{D}_{qcq}} \rho, \quad (1.8b)$$

①                      ②                      ③

avec le vecteur contrainte  $\vec{T} = \sigma \cdot n$  homogène à une force. Dans le cas présent on a supposé, pour plus de clarté, que la variation d'accélération est négligeable sur le volume  $\mathcal{D}_{qcq}$ . On retrouve bien une forme classique du principe fondamental de la dynamique : « *la somme des forces (à savoir la pression de surface ① et la force interne ②) est égale au produit de la masse par l'accélération ③* ».

Le même type de raisonnement peut être appliqué à des grandeurs électromagnétiques mesurables (courants, tensions). Les intégrales s'appuient alors sur une surface quelconque notée  $\mathcal{S}_{qcq}$ . L'intégrale de l'équation de Maxwell–Ampère permet

de déduire le théorème d'Ampère :

$$\int_{S_{qcq}} \text{rot } H \cdot n = \int_{S_{qcq}} J \cdot n, \quad (1.9)$$

où  $n$  est le vecteur normal à la surface, à l'aide du théorème du rotationnel on obtient :

$$\int_{\partial S_{qcq}} H \cdot t_\gamma = \int_{S_{qcq}} J \cdot n, \quad (1.10)$$

①                      ②

dont la traduction habituelle est : « la force magnétomotrice ① le long de la courbe  $\partial S_{qcq}$  est égale au courant enlacé ② ». De même l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\int_{S_{qcq}} \text{rot } E \cdot n = - \int_{S_{qcq}} \partial_t B \cdot n, \quad (1.11)$$

devient :

$$\int_{\partial S_{qcq}} E \cdot t_\gamma = - \int_{S_{qcq}} \partial_t B \cdot n, \quad (1.12)$$

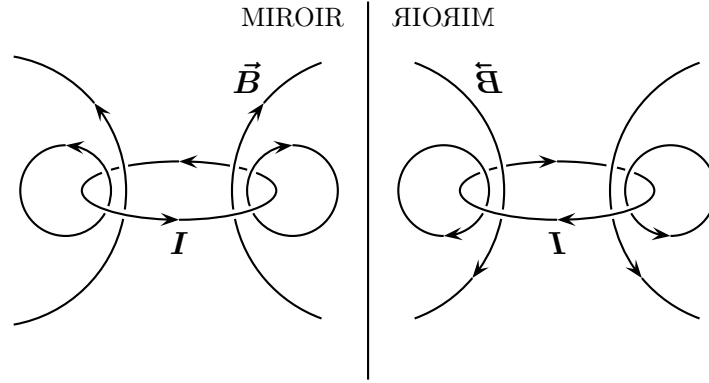
①                      ②

traduisible par : « la variation de flux de l'induction magnétique ② produit une force électromotrice négative (tension aux bornes fictives de  $\partial S_{qcq}$ ) ».

Ces divers exemples tendent à montrer que la plupart des phénomènes, traduits par les diverses équations aux dérivées partielles des modèles physiques, apparaissent sous forme intégrée. L'intégration de ces équations sur des volumes dits « macroscopiques » n'est intéressante que pour l'étude des systèmes au travers de leurs grandeurs globales. Les remarques faites ci-dessus deviennent intéressantes si les diverses grandeurs de la physique sont décomposées sur des grandeurs élémentaires.

### 1.2.2 Rupture de symétrie des équations de Maxwell

La structure de  $\mathbb{R}^3$  peut aussi poser problème dans le cas de transformations de l'espace (LÉVY 2009). Nous allons montrer comment les équations de Maxwell peuvent être modifiées, et quelles sont les grandeurs constantes.



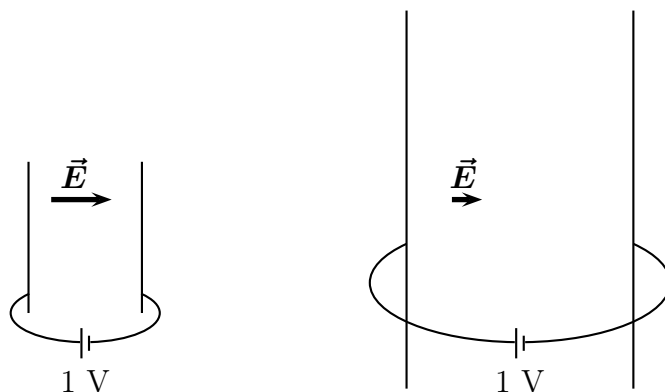
**FIGURE 1.1** – Représentation d’une bobine et de son image par la transformation  $(e_x, e_y, e_z) \rightarrow (-e_x, e_y, e_z)$  (LÉVY 2005).

**Cas d’une bobine (champ magnétique)** Le premier exemple est celui d’une bobine dans l’air (figure 1.1, LÉVY 2005). On s’intéresse au champ magnétique créé par le système lors d’une symétrie plane  $(e_x, e_y, e_z) \rightarrow (-e_x, e_y, e_z)$ . Le champ magnétique ne se comporte pas comme les vecteurs usuels de  $\mathbb{R}^3$ . Cette remarque peut laisser sous-entendre que l’induction magnétique est mal représentée par un vecteur classique, ou du moins, que sa structure est plus complexe.

**Cas d’un condensateur (champ électrique)** On considère un condensateur plan, comme décrit sur la figure 1.2. Pour un point  $x$  de l’espace donné, on considère un vecteur quelconque  $v$  et le champ électrique  $E(x)$ . Si on réalise une homothétie de l’espace (par exemple expansion par 2), alors les vecteurs précédents se trouvent maintenant au point  $x' = 2x$ . Le vecteur  $v$  a bien doublé de norme, ainsi  $v' = 2v$ . Cependant, le champ  $E$  a vu sa norme divisée par deux :  $E'(x') = 1/2 E(x)$ . Le champ électrique ne suit pas la même relation que le reste des vecteurs (LÉVY 2005). Le produit scalaire entre le champ électrique et un vecteur quelconque est quant à lui conservé.

### 1.3 Vers les formes différentielles

Le paragraphe 1.2.2 montre que, par exemple les phénomènes magnétiques sont mal représentés par des éléments vectoriels locaux. Dans leur structure classique, une modification de la métrique a une influence sur les champs effectivement mo-



**FIGURE 1.2** – *Figure schématique d'un condensateur plan et de son image par une homotétie de facteur 2 (LÉVY 2005).*

délisés. Les deux remarques précédentes laissent à penser qu'il ne faut pas utiliser, par exemple, le champ vectoriel  $E = (E_x, E_y, E_z)$  mais le covecteur  $e(x)$  qui, à une variété de dimension 1, fait correspondre  $v \rightarrow E_x \cdot v_x + E_y \cdot v_y + E_z \cdot v_z$ . En termes plus simples, à partir d'une courbe, ce covecteur fait correspondre la circulation associée. BOSSAVIT (1993) considère la structure de l'espace Hilbertien  $\mathbb{R}^3$  comme étant trop riche. Nous allons alors présenter les expressions à l'aide de formes linéaires, et nous verrons que ces outils permettront de simplifier les écritures des équations de la physique.

# Chapitre 2

## Formes différentielles

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Rappels</b>	<b>30</b>
2.1.1	Définitions	30
2.1.2	Variétés différentiables	31
2.1.3	Vecteur tangent, espace vectoriel tangent	32
2.1.4	Covecteurs	34
2.1.5	Formes linéaires alternées	34
2.1.6	Formes différentielles	35
<b>2.2</b>	<b>Lien avec le monde réel</b>	<b>35</b>
<b>2.3</b>	<b>Outils de base</b>	<b>36</b>
2.3.1	Produit extérieur	37
2.3.2	Produit intérieur	37
2.3.3	Différentielle extérieure	38
2.3.4	Théorème de Stokes	39
2.3.5	Trace	39
2.3.6	Opérateur de Hodge	39
2.3.7	Dérivée de Lie	39
2.3.8	Lemme de Poincaré	40
<b>2.4</b>	<b>Application à la physique</b>	<b>40</b>
2.4.1	Cas de la dimension 3	40
2.4.2	Formules utiles	42

---

Avant d'exprimer les équations de Maxwell sous forme « moderne », il convient d'introduire les notations permettant de comprendre le formalisme (de plus en plus courant) utilisé dans la littérature (BOSSAVIT 1991, 1992 ; « Discrete spaces for div and curl-free fields » ; KOVANEN et al. 2011 ; BOSSAVIT et al. 2003). Ce chapitre présente, dans une première partie sans lien direct avec la physique, les outils et notations nécessaires. Les formules essentielles et le lien avec la physique sont par la suite introduits. Cette partie ne prétend pas fournir une explication détaillée, mais présente les éléments essentiels nécessaires à la compréhension de la littérature.

## 2.1 Rappels

### 2.1.1 Définitions

On considère un espace topologique, pour l'instant quelconque, noté  $E$  (LEFEVRE 2007) et on s'intéresse à une ou plusieurs parties de  $E$  appelées « ouverts » (supposées bornées dans notre cas) ayant les propriétés suivantes :

- toute réunion (finie ou non) d'ouverts est un ouvert ;
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ;
- l'ensemble vide  $\emptyset$  et l'ensemble  $E$  sont des ouverts.

Si un espace  $F$  possède un complémentaire ouvert, alors cet espace est dit « fermé » (autrement dit, c'est un ouvert avec son bord). Si chaque point de  $E$  possède un voisinage qui lui est propre (deux points ont deux voisinages disjoints), alors on parle d'espace disjoint.

Une application, notée  $f$ , d'un espace  $C$  vers  $D$  est continue si et seulement si l'image de  $C$  par  $f$  est un ouvert et réciproquement. Elle appartient à l'espace des applications de  $C$  dans  $D$  noté  $L(C, D)$ . Si  $f$  est bijective, et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues,  $C$  et  $D$  sont homéomorphes et  $f$  est un homéomorphisme.

Une application  $d$  de  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme pour l'espace  $E$  si  $d$  vérifie les propriétés suivantes :

- symétrie –  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$  ;
- séparation –  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  ;
- homogénéité –  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, d(\lambda x) = |\lambda|d(x)$  ;
- sous-additivité –  $\forall (x, y) \in E^2, d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ .

La propriété de positivité  $\forall (x, y) \in E, d(x, y) \geq 0$  découle de l'inégalité triangulaire. Pour plus de simplicité, on suppose la constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , mais il peut s'agir d'un espace plus général. La propriété d'homogénéité n'est pas indispensable pour le moment, une distance aurait été suffisante. Si la propriété de séparation est manquante ( $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \nRightarrow x = y$ ) alors  $d$  est appelée semi-norme. C'est par exemple le cas de  $\text{grad } u \cdot \text{grad } v$  pour l'espace  $\mathbb{R}^3$  (c'est une norme pour  $\mathcal{H}_0^1$ ).

L'association de  $E$  et d'une norme, notée  $(E, d)$ , est appelée espace métrique. Une suite  $\{x_n\}$  est dite de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0$ , alors  $\exists N$  tel que  $\forall n > N$  et  $\forall m > N$  alors  $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$ . En particulier un espace est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy converge (il n'y a aucun point manquant). Un espace  $(A, d)$  est dit de Banach s'il est complet pour sa norme. Les espaces de Banach sont les espaces les moins restrictifs pour l'étude des fonctions différentiables utiles à la modélisation des problèmes physiques.

Une application  $f$  est dite différentiable en  $x$  si, pour tout vecteur  $h$ , il existe une application  $df_x$  et un vecteur  $\alpha$ , tel que :

$$f(x + h) = f(x) + df_x(h) + \alpha \|h\|.$$

$df_x$  est appelée différentielle de  $f$  en  $x$ . Par extension,  $f$  est différentiable sur une partie  $F$  de  $(E, d)$  si elle est différentiable en tout point de  $F$ . Dans ce cas l'application liant tout point de  $F$  à chaque fonction  $df_x$  est appelée dérivée :

$$\nabla f : F \rightarrow L(F, G) \tag{2.1a}$$

$$x \mapsto df_x. \tag{2.1b}$$

Une forme linéaire est une fonction de  $E^k$  dans  $E$  satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{2.2a}$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x). \tag{2.2b}$$

La notion de forme est liée au fait que la fonction prend ses valeurs dans l'espace  $E$  considéré.

### 2.1.2 Variétés différentiables

**Notion de carte et d'atlas** Une variété  $V$  est un espace topologique dont chaque point  $x$  possède un voisinage  $U_x$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\phi_x$  est l'homéo-



morphisme liant  $U_x$  à  $\mathbb{R}^n$ ,  $(U_x, \phi_x)$  est nommée carte. Si l'on prend l'ensemble des cartes permettant de recouvrir  $V$ , on obtient un atlas. Si de plus les fonctions  $\{\phi_x\}$  sont considérées  $p$  fois différentiables (classe  $\mathcal{C}^p$ ), on parle d'atlas de classe  $\mathcal{C}^p$ .

Il faut ajouter une propriété formulée sous la forme : si deux voisinages  $U_i$  et  $U_j$  sont non disjoints ( $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ), alors  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  est non nulle et définit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de l'ouvert  $\phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$  vers l'ouvert  $\phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$  (les  $\phi_i$  apparaissant ici car on considère  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ ).

**Notion de variété** L'atlas de classe  $\mathcal{C}^p$  munit  $V$  d'une structure différentiable. Des atlas (de classe  $\mathcal{C}^p$ ) sont dits compatibles si leur réunion est un atlas (de classe  $\mathcal{C}^p$ ). L'union de tous les atlas forme un atlas maximal  $A$ . Le couple formé par la variété  $V$  et l'atlas maximal forme une variété différentiable (de classe  $\mathcal{C}^p$ ).

Cette définition abstraite peut être traduite par : la variété de dimension  $n$  est un « assemblage de morceaux de  $\mathbb{R}^n$  », régulièrement raccordés (BOSSAVIT 1993). Cette structure est utile pour l'étude des grandeurs physiques sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.1.3 Vecteur tangent, espace vectoriel tangent

**Vecteur tangent** Les vecteurs tangents sont largement utilisés en physique (calcul d'abscisses curvilignes de vitesses, de circulations). On se propose d'étendre la définition empirique de la notion de vecteur tangent à des variétés de dimension quelconque. On commence par considérer un arc différentiable, dans la variété  $V$ , défini comme :

$$C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \quad (2.3)$$

$$t \mapsto C(t), \quad (2.4)$$

où  $C(t)$  est une sous-partie de  $V$ . On suppose que cet arc passe par le point  $x$  de  $V$ , ainsi  $\exists t_0 \in I / C(t_0) = x$ . Pour définir la dérivée au point  $x$  de la variété, il faut une fonction  $f$ , définie sur  $V$ . Ainsi l'ensemble des valeurs de  $f$  sur l'arc  $C$  est donné par  $f \circ C$ , et est par conséquent dérivable en  $x$ . On note la dérivée :

$$\dot{C}(x)[f] = \partial_t f \circ C|_{t_0}. \quad (2.5)$$

Deux trajectoires  $C_1$  et  $C_2$  sont équivalentes si elles ont la même dérivée en  $x$ , soit  $\forall f$  :

$$\dot{C}_1(x)[f] = \dot{C}_2(x)[f]. \quad (2.6)$$

Le vecteur tangent à  $V$  en  $x$  se définit comme la classe d'équivalence de toutes les trajectoires ayant la même dérivée en  $x$ . Il est plus parlant de définir le vecteur tangent comme un opérateur différentiel du premier ordre  $\vec{v}|_x[f]$  défini sur un espace de fonctions différentiables au moins en  $x$ , et à valeurs réelles. Il vérifie les propriétés suivantes de linéarité et de dérivation :

$$\forall(f, g) \in L(F, G)^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (2.7a)$$

$$\vec{v}|_x[f + g] = \vec{v}|_x[f] + \vec{v}|_x[g], \quad (2.7b)$$

$$\vec{v}|_x[af] = a \vec{v}|_x[f], \quad (2.7c)$$

$$\vec{v}|_x[fg] = f(x)\vec{v}|_x[g] + \vec{v}|_x[f]g(x), \quad (2.7d)$$

$$\vec{v}|_x[\mathbf{1}] = 0. \quad (2.7e)$$

On peut associer l'idée ici que  $\vec{v}|_x[f]$  est la vitesse de la trajectoire  $C$ , au temps  $t_0$ , lorsque le point considéré se trouve en  $x$ . Cette définition peut être transposée en dimension  $n$  par décomposition de  $f$  sur une base de l'espace fonctionnel. Soient les coordonnées de  $f$  données par  $n$  fonctions  $f_i$  et celles de  $x$  telles que  $x_i = C_i(t)$ ,  $\forall t$ . L'équation 2.5 devient, pour la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée :

$$\dot{C}(x)[f] = d_t f_i \circ C_i|_{t_0} = d_t C_j|_{t_0} \partial_{x_i} f_i|_{x_i=C_i(t_0)}. \quad (2.8)$$

Le vecteur vitesse peut être indentifié comme étant :

$$v_i = d_t C_j|_{t_0}, \quad (2.9)$$

et de manière analogue, le vecteur tangent est une application de dimension  $n$  dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est :  $v_i \partial_{x_i}$ . On définit le champ de vecteur tangent  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} = \sum_i v_i \partial_{x_i}. \quad (2.10)$$

Le champ de vecteur tangent n'est défini que localement. Cette application s'applique à une fonction ( $f$  par exemple) et s'écrit :

$$\vec{v}[f] = \sum_i v_i \partial_{x_i} f_i. \quad (2.11)$$

**Plan tangent** Nous avons vu que le vecteur tangent est une application définie sur un espace fonctionnel de dimension  $n$ , appliquée au point  $x$  de la variété  $V$ , et à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . Le plan tangent est l'espace des vecteurs tangents en  $x$  et est formé par exemple par la base des  $\partial_{x_i}$ . On note cet espace  $T_x$ .

### 2.1.4 Covecteurs

Si  $V$  est une variété de dimension  $n$  et  $x$  un point de  $V$ , il existe un espace de fonctions appelé espace tangent  $T_x$ . On définit parallèlement à  $T_x$  l'espace vectoriel dual, noté  $T_x^*$  et appelé espace cotangent, formé des applications linéaires associant un élément de  $T_x$  à un réel. On note par  $\{\vec{e}_i\}$  une base de  $T_x$  et par  $\{d_j\}$  une base de  $T_x^*$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\langle \vec{e}_i, d_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

Soit une forme linéaire  $w$ , élément du dual  $T_x^*$ , ainsi :

$$w = \sum_i w_i d_i. \quad (2.13)$$

Si on définit les  $v_i$  comme  $\vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i$ , le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  appliqué à l'opérateur exprime la dualité existant entre  $w$  et le vecteur  $\vec{v}$  :

$$\langle w, \vec{v} \rangle = \sum_i w_i v_i. \quad (2.14)$$

Nous appellerons  $w$  un covecteur.

Ainsi, par identification avec l'équation 2.11, une fonction au voisinage du point  $x$  définit, au travers de sa différentielle, une fonction de l'espace cotangent  $T_x^*$  notée  $w$ . En d'autres termes, au voisinage du point  $x$ , les covecteurs sont des éléments de  $T_x^*$  et l'ensemble des covecteurs forme un espace de dimension double appelé fibré cotangent. Les covecteurs  $\{d_i\}$  permettront d'exprimer les  $p$ -covecteurs puis les formes linéaires dans la carte locale liée à  $x$ .

### 2.1.5 Formes linéaires alternées

Les  $p$ -covecteurs sont des applications multilinéaires alternées notées  $L$  :

$$C : T_x^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.15)$$

$$v \mapsto L(v). \quad (2.16)$$

La forme est multilinéaire, ainsi pour tout indice  $(i, j)$ , avec  $i \neq j$ , et réel  $\alpha$  :

$$L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + W, v_{i+1}, \dots, v_p) = L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) \quad (2.17a)$$

$$+ L(v_1, \dots, v_{i-1}, W, v_{i+1}, \dots, v_p), \quad (2.17b)$$

$$L(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) = \alpha L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p), \quad (2.17c)$$

$$L(v_1, \dots, v_i; \dots, v_j, \dots, v_p) = -L(v_1, \dots, v_j; \dots, v_i, \dots, v_p). \quad (2.17d)$$

On note  $\{d_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d_{\sigma(p)}\}$ , une base de  $p$ -covecteurs, où  $\sigma$  est une injection croissante de l'ensemble des entiers (BOSSAVIT 1993). Appliquée à un ensemble de vecteurs  $\{v_i\} \in T_x^p$ , le résultat est :

$$d_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d_{\sigma(p)}(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\Pi} v_{\sigma \circ \Pi(1)} v_{\sigma \circ \Pi(2)} \cdots v_{\sigma \circ \Pi(p)}. \quad (2.18)$$

Ces  $p$ -covecteurs sont à la base de la définition des formes différentielles.

### 2.1.6 Formes différentielles

Les  $p$ -formes différentielles sont des champs  $\mathcal{C}^\infty$  de  $p$ -covecteurs qui, écrits dans la base locale associée à la carte au point  $x$  ( $\{d_i\}$ ), s'expriment comme :

$$m : \mathcal{C}^\infty(T_x^p, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.19)$$

$$x \mapsto \sum_{\sigma \in C_n^p} d_\sigma(c) d_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d_{\sigma(p)}, \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{C}^\infty(T_x^p, \mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  allant de  $T_x^p$  vers  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Lien avec le monde réel

Les expressions données ci-dessus sont parfois abstraites et prennent tout leur sens quand elles sont appliquées, en dimension 3, à des vecteurs connus. On définit la forme linéaire suivante :

$$d_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

$$(x, y, z) \mapsto x ; \quad (2.22)$$

et on procède de même pour les formes linéaires notées  $d_y$  et  $d_z$  (LÉVY 2005). Les formes ainsi définies dépendent de la base choisie. Notons  $m$  une forme linéaire quelconque et  $u$  un point de  $\mathbb{R}^3$ , alors il existe un unique triplet  $(a, b, c)$  tel que :

$$f(u) = a d_x(u) + b d_y(u) + c d_z(u). \quad (2.23)$$

Pour faire le lien avec ce qui précède, les fonctions  $d_x$ ,  $d_y$  et  $d_z$  sont des formes linéaires de  $\mathbb{R}^3$  et  $\{d_x, d_y, d_z\}$  est une base de l'espace dual de  $\mathbb{R}^3$ . Reprenons maintenant les exemples du condensateur plan et de la bobine.

**Cas du condensateur plan** Une dilatation de l'espace transforme les coordonnées du point  $u(x, y, z)$  en  $u'$  de coordonnées  $(x', y', z') = (2x, 2y, 2z)$ . Les formes linéaires  $d'_x$ ,  $d'_y$  et  $d'_z$  sont quant à elles multipliées par deux. L'expérience montre que, pour un point considéré, la norme du champ magnétique  $E$  est réduite de moitié. Ainsi  $E' = (E'_x, E'_y, E'_z) = 1/2(E_x, E_y, E_z) = 1/2E$ , on constate que la représentation vectorielle du champ est modifiée. En revanche la forme linéaire, que nous noterons  ${}^1e$ , définie par :

$${}^1e = E_x dx + E_y dy + E_z dz, \quad (2.24)$$

$$= E'_x d'_x + E'_y d'_y + E'_z d'_z, \quad (2.25)$$

est inchangée.

**Cas de la bobine** Une remarque similaire peut être faite avec le cas de la bobine. Dans  $\mathbb{R}^3$ , les 2-formes linéaires alternées ont pour base :

$$\{d_y \wedge d_z, d_z \wedge d_x, d_x \wedge d_y\}. \quad (2.26)$$

La transformation de miroir fait passer la base de  $\mathbb{R}^3$  de  $(e_x, e_y, e_z)$  vers  $(-e_x, e_y, e_z)$ . On remarque que le champ vectoriel  $B'$  dans le nouveau repère est  $-B$ , où  $B$  est le champ exprimé dans le repère initial. Une fois encore la représentation vectorielle est dépendante de la base choisie. La 2-forme linéaire alternée, notée  ${}^2b$ , demeure inchangée :

$${}^2b = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy, \quad (2.27)$$

$$= B'_x d'_y \wedge d'_z + B'_y d'_z \wedge d'_x + B'_z d'_x \wedge d'_y. \quad (2.28)$$

En effet, on obtient :  $d_y \wedge d_z = d'_y \wedge d'_z$ ,  $d_z \wedge d_x = -d'_z \wedge d'_x$ ,  $d_x \wedge d_y = -d'_x \wedge d'_y$ , et  $B_x = B'_x$ ,  $B_y = -B'_y$ ,  $B_z = -B'_z$ .

## 2.3 Outils de base

Afin de pouvoir exprimer les relations entre les différents champs, nous allons introduire divers opérateurs. On supposera les formes et les  $p$ -covecteurs définis sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3.1 Produit extérieur

Le produit extérieur est une opération permettant, à partir d'un  $p$ -covecteur  $f$  et d'un  $k$ -covecteur  $g$ , de produire un  $(p+k)$ -covecteur défini comme :

$$\begin{aligned} \wedge : T_x^p \times T_x^k &\rightarrow T_x^{(p+k)} \\ f \wedge g(\vec{v}_1, \dots, v_{p+k}) &\mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+k}} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $\mathfrak{S}$  est le groupe des permutations et  $\epsilon(\sigma)$  est la signature de  $\sigma$ . La signature est en quelque sorte une généralisation du symbole de Kroneker, et peut être définie par :

$$\delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si les } i_1 \dots i_n \text{ sont distincts et} \\ & \text{si les } j_1 \dots j_n \text{ forment une permutation paire;} \\ -1 & \text{si les } i_1 \dots i_n \text{ sont distincts et} \\ & \text{si les } j_1 \dots j_n \text{ forment une permutation impaire;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

On peut alors réécrire l'équation 2.29 comme :

$$\begin{aligned} \wedge : T_x^p \times T_x^k &\rightarrow T_x^{(p+k)} \\ f \wedge g(\vec{v}_1, \dots, v_{p+k}) &\mapsto \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq p+q \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq p+q}} \delta_{1 \dots p+k}^{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cette opération est identique pour les champs de  $p$ -covecteurs et les champs de  $k$ -covecteurs permettant de définir la forme différentielle de degré  $p+k$  à partir des formes  $v$  et  $w$  :  $v \wedge w$ . Cet opérateur est entre autre :

- bilinéaire :  $w \wedge (v_1 + \alpha v_2) = w \wedge v_1 + \alpha w \wedge v_2$  ;
- antisymétrique :  $v \wedge w = -1^{p+k} w \wedge v$  ;
- associatif :  $w \wedge (v_1 \wedge v_2) = w \wedge (v_1) \wedge v_2$ .

### 2.3.2 Produit intérieur

Soit  $f$  un  $k$ -covecteur et  $\vec{v}$  un vecteur, il est possible de déterminer une  $(k-1)$ -forme linéaire  $g$  telle que :

$$\begin{aligned} T_x^k &\rightarrow T_x^{k-1} \\ g(\vec{v}_1, \dots, v_{k-1}) &= f(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, v_{k-1}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}$  sont  $k - 1$  vecteurs arguments des formes linéaires. Cette opération, notée  $g = i(\vec{v})f$ , est appelée produit intérieur de  $f$  et du vecteur  $\vec{v}$ . Il en est de même avec un champ de  $k$ -covecteurs (une  $k$ -forme  $w$ ) et les champs de vecteur  $V$ , ainsi pour une  $k$ -forme :

$$i_V w \mapsto i(\vec{v} = V(x))w(x). \quad (2.33)$$

Si  $v$  est une  $p$ -forme et  $w$  une  $k$ -forme,  $a$  et  $b$  deux réels, cet opérateur satisfait les relations suivantes :

$$i_V(a v + b w) = w a i_V v + b i_V w, \quad (2.34a)$$

$$i_V(v \wedge w) = i_V(v) \wedge w + (-1)^p v \wedge i_V(w), \quad (2.34b)$$

$$i_V i_W v = -i_W i_V v. \quad (2.34c)$$

### 2.3.3 Différentielle extérieure

La différentielle extérieure est la généralisation de la notion de différentiabilité aux  $p$ -covecteurs et plus généralement aux formes différentielles. On note  $d$  cet opérateur permettant de faire passer des  $p$ -covecteurs /  $p$ -formes, aux  $(p + 1)$ -covecteurs, calculé ainsi à l'aide des applications  $\{d_i\}$  :

$$d : T_x^p \rightarrow T_x^{p+1}$$

$$w(u) \mapsto dw(u) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} w_{i_1, \dots, i_p}(u) d_{i_1} \wedge d_{i_2} \wedge \dots \wedge d_{i_p}. \quad (2.35)$$

L'opérateur  $d$  vérifie en particulier la relation suivante, avec  $v$  une  $p$ -forme et  $w$  une  $k$ -forme :

$$d[v \wedge w] = dv \wedge w + (-1)^p v \wedge dw. \quad (2.36)$$

Le carré de l'opérateur différentielle extérieur est toujours nul, ainsi pour toute  $p$ -forme  $w$  :

$$d \circ dw = 0. \quad (2.37)$$

L'image de l'opérateur  $d$ , appliqué aux  $p$ -formes, est donc incluse dans le noyau de l'opérateur  $d$  appliqué aux  $(p + 1)$ -formes. Cette propriété sera à la base des identités remarquables de combinaison des opérateurs vectoriels.

### 2.3.4 Théorème de Stokes

Intégrée sur une variété  $V$ , la forme  $v$  satisfait la relation suivante :

$$\int_V \mathbf{d}v = \int_{\partial V} v. \quad (2.38)$$

Cette relation s'appelle théorème de Stokes.

### 2.3.5 Trace

La trace d'une forme différentielle sur une variété  $\omega$  est un opérateur de restriction sur  $\omega$ . On le note  $\mathbf{t}$ . Cet opérateur engendre donc une forme de même degré. En utilisant le théorème de Stokes, par identification, on remarque que les opérateurs  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{t}$  commutent, ainsi pour toute forme  $w$  :

$$\mathbf{d}tw = \mathbf{t}dw. \quad (2.39)$$

### 2.3.6 Opérateur de Hodge

L'opérateur de Hodge établit une correspondance entre les  $p$ -formes et les  $(n - p)$ -formes, et sera noté  $\star$ . Nous verrons par la suite que cet opérateur joue un rôle particulier car il est, pour les modèles physiques, étroitement lié aux lois de comportement. Le choix d'une méthode de discrétisation influera sur la manière de calculer cet opérateur (BOSSAVIT et MAYERGOYZ 1998).

### 2.3.7 Dérivée de Lie

La dérivée de Lie pour les formes différentielles est une généralisation de la différentiation, suivant le champ  $V$ . Cette dérivée peut être définie de manière axiomatique (PAULIN 2007). Il existe une unique fonction  $\mathcal{L}_V$  telle que :

- $\mathcal{L}_V$  est linéaire ;
- $\mathcal{L}_V$  possède la structure d'une dérivée et vérifie la formule de Leibnitz, ainsi si  $v$  et  $w$  sont deux formes  $\mathcal{L}_V(v \wedge w) = v \mathcal{L}_V w + \mathcal{L}_V v \wedge w$  ;
- $\mathcal{L}_V$  et  $\mathbf{d}$  commutent.

De plus, si  $V$  et  $W$  sont deux champs alors  $\mathcal{L}_{[V W]} = \mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_W - \mathcal{L}_W \circ \mathcal{L}_V$ . La définition la plus utile de  $\mathcal{L}_V$  est réalisée à partir du produit intérieur  $i_V$  et de la



différentielle extérieure :

$$\mathcal{L}_V = i_V \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ i_V. \quad (2.40)$$

Si  $f$  est une 0-forme (i.e. une fonction classique), alors  $\mathcal{L}_V f$  est définie par le produit scalaire  $\langle df, V \rangle$ . La dérivée connective physique est  $D_t = \partial_t + V \cdot \nabla = \partial_t + \mathcal{L}_V$ .

### 2.3.8 Lemme de Poincaré

Soit  $w$  une  $p$ -forme différentielle, cette forme est dite fermée si  $\mathbf{d}w = 0$  et est dite exacte s'il existe une  $(p-1)$ -forme  $v$  telle que  $w = \mathbf{d}v$ . Ainsi, d'après le lemme de Poincaré, toute forme exacte est fermée. Cependant la réciproque n'est vraie que si le domaine considéré est contractile. Dans ce cas, la suite formée par les applications successives de l'opérateur  $\mathbf{d}$  devient exacte.

En pratique, la réciproque est vraie localement si on considère chacun des voisinages des différents points de la variété. Cette remarque est particulièrement importante car elle fournit une condition sur le caractère intégrable des formes différentielles. En particulier, elle sert en électromagnétisme à définir les potentiels, et ce, même si le domaine n'est pas contractile.

## 2.4 Application à la physique

Les outils précédents sont à appliquer dans un cadre plus restreint pour la modélisation des problèmes physiques. On suppose dans ce qui suit que le modèle physique est défini sur un espace topologique ouvert  $D$  ayant une structure de Banach et que les fonctions sont suffisamment régulières.

### 2.4.1 Cas de la dimension 3

En dimension 3, les seules formes considérées sont celles variant de  $p = 0$  à  $p = 4$ . Ainsi, à l'aide des formes linéaires  $d_x$ ,  $d_y$  et  $d_z$  définies au paragraphe 2.2, les formes de degrés divers ont pour base :

- 0-formes :  $\{1\}$  ;
- 1-formes :  $\{d_x, d_y, d_z\}$  ;
- 2-formes :  $\{d_y \wedge d_z, d_z \wedge d_x, d_x \wedge d_y\}$  ;
- 3-formes :  $\{d_x \wedge d_y \wedge d_z\}$  ;

Les diverses formes différentielles peuvent être exprimées en fonction de champs au point  $x$  qui peuvent les représenter (notés  $F$ ). Ainsi les 0-formes sont les champs de covecteurs notés  ${}^0u$  associant l'ensemble vide à la fonction elle-même :

$${}^0f = \left\{ \phi_x; \phi_x : \begin{array}{l} \emptyset \rightarrow \mathbb{R} \\ \cdot \mapsto F(x) \end{array} \right\}. \quad (2.41)$$

Pour les 1-formes, la valeur réelle est obtenue par produit scalaire avec le vecteur  $v$  :

$${}^1f = \left\{ \phi_x; \phi_x : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto F(x) \cdot u \end{array} \right\}. \quad (2.42)$$

Pour les 2-formes :

$${}^2f = \left\{ \phi_x; \phi_x : \begin{array}{l} (\mathbb{R}^3)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto F(x) \cdot u \times v \end{array} \right\}, \quad (2.43)$$

et les 3-formes :

$${}^3f = \left\{ \phi_x; \phi_x : \begin{array}{l} (\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) \mapsto F(x) \det(u, v, w) \end{array} \right\}. \quad (2.44)$$

Ces expressions montrent que les 0-formes sont bien adaptées pour les champs en un point, les 1-formes sont adaptées à l'intégration sur une courbe, les 2-formes sont adaptées aux intégrales de surface, et les trois formes sont associées aux intégrales sur les volumes.

Le champ  $F$  représenté dépendra effectivement de la métrique (mesure et orientation). Par exemple, pour les 1-formes, si le couple « mesure + orientation »  $(\cdot, OR)$  est transformé en un autre noté  $(\circ, \mathbb{O}\mathbb{R})$ , l'invariance de  ${}^1u$  suppose que le champ  $F$  doit varier en  $\mathbb{F}$ . Il existe alors un opérateur  $L$  tel que  $v \circ v = L(u) \cdot L(v)$ , ainsi :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, {}^1u(v) = \mathbb{F}(x) \circ u = L(\mathbb{F}(x)) \cdot L(u) = L_a L(\mathbb{F}(x)) \cdot u = F(x) \cdot u, \quad (2.45)$$

avec  $L_a$  l'opérateur adjoint et  $\mathbb{F} = [L_a L]^{-1}(F)$ . Les différentes transformations<sup>1</sup> sont répertoriées dans BOSSAVIT (1993).

---

1. On peut remarquer que ces formules sont très proches de celle obtenues pour le passage d'un élément tétraédrique de référence vers un élément réel. En effet, dans ce dernier cas les transformations ne sont rien d'autre qu'une modification linéaire de la métrique de  $\mathbb{R}$ .

### 2.4.2 Formules utiles

Ce paragraphe résume les formules utiles pour la représentation des modèles sous forme différentielle. Ainsi, par identification avec les champs vectoriels, les formules suivantes sont obtenues.

Pour le produit extérieur :

- ${}^0f \wedge {}^0g = {}^0g \wedge {}^0f \quad : \cdot \mapsto f(x)g(x);$
- ${}^0f \wedge {}^1g = -{}^1g \wedge {}^0f \quad : u \mapsto f(x)g(x) \cdot u;$
- ${}^1f \wedge {}^1g = {}^1g \wedge {}^1f \quad : (u, v) \mapsto [f(x) \times g(x)] \cdot [u \times v];$
- ${}^1f \wedge {}^1g = {}^1g \wedge {}^1f \quad : (u, v, w) \mapsto f(x) \cdot g(x) \det(u, v, w).$

Pour le produit intérieur :

- $i_v {}^1f \quad : \cdot \mapsto f(x)v(x);$
- $i_v {}^2f \quad : u \mapsto f(x) \times v(x) \cdot u;$
- $i_v {}^3f \quad : (u, w) \mapsto f(x) \det(v(x), u, w).$

Relations avec la différentielle extérieure :

- $d^0f \quad : u \mapsto \text{grad } f(x)u;$
- $d^1f \quad : (u, v) \mapsto \text{rot } f(x) \cdot u \times v;$
- $d^2f \quad : (u, v, w) \mapsto \text{div } f(x) \det(u, v, w).$

Les autres relations souvent utiles étant :

- $i_V(v \wedge w) = i_V(v) \wedge w + (-1)^p v \wedge i_V(w);$
- $i_V i_W v = -i_W i_V v;$
- $d \circ d w = 0;$
- $\int_V d v = \int_{\partial V} v;$
- $\mathcal{L}_V = i_V \circ d + d \circ i_V.$

# Chapitre 3

## Modélisation des phénomènes physiques

### Sommaire

---

3.1	Modélisation des phénomènes thermiques . . . . .	44
3.2	Modélisation des phénomènes mécaniques . . . . .	45
3.3	Modélisation des phénomènes magnétiques . . . . .	47

---

Cette partie introduit les divers modèles avant discrétisation. Chaque modèle sera présenté sous forme de relations classiques impliquant les équations aux dérivées partielles des champs et les formes utilisant les formes différentielles.

### 3.1 Modélisation des phénomènes thermiques

Nous ne considérerons que des modèles de thermique linéaire. La loi de Fourier pour les matériaux linéaires et l'équation de la chaleur s'écrivent :

$$-\operatorname{div} \Phi + s = \rho C_p \partial_t T, \quad (3.1)$$

$$\Phi = -k \operatorname{grad} T. \quad (3.2)$$

Ainsi l'équation en température  $T$  peut être formulée sous la forme :

$$k \Delta T + s = \rho C_p \partial_t T, \quad (3.3)$$

où  $\Phi$  est la densité de flux de chaleur (dirigée, par convention, vers les températures décroissantes),  $s$  est la densité des sources thermiques, et  $\rho C_p$  est la capacité thermique à pression constante.

Des pertes par convection sont ajoutées aux surfaces latérales. On utilise pour cela la loi de Newton appliquée à la densité de flux de chaleur :

$$-\Phi \cdot \mathbf{n} = h(T - T_{ext}), \quad (3.4)$$

où  $h$  est le coefficient local de transfert thermique,  $n$  est la normale unitaire sortante et  $T_{ext}$  est la température du milieu extérieur. Les équations 3.3 et 3.4 sont réécrites pour conduire à la formulation faible suivante :

$$\int_{\mathcal{D}_{ther}} \rho C_p \partial_t T u' + \int_{\mathcal{D}_{ther}} k \operatorname{grad} T \operatorname{grad} u' + \int_{\Gamma} h T u' = \int_{\mathcal{D}_{ther}} s u' + \int_{\Gamma} h T_{ext} u', \quad (3.5)$$

ou  $u'$  est une fonction scalaire quelconque s'annulant aux bords à température imposée.

Sous la forme différentielle, ces équations s'écrivent alors :

$$d\Phi + s = \star_{\rho C_p} \partial_t T, \quad (3.6a)$$

$$\Phi = -\star_k dT. \quad (3.6b)$$

où  $\star_k$  est un opérateur de Hodge.  $\Phi$  apparaît donc en tant que 2-forme, compatible avec la notion de flux de chaleur. La figure 3.1 permet de placer les diverses grandeurs.

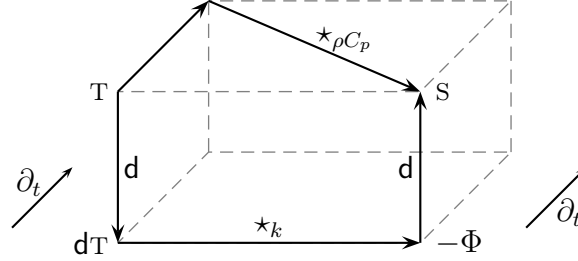


FIGURE 3.1 – Diagramme « de Tonti » pour le problème de thermique.

## 3.2 Modélisation des phénomènes mécaniques

En utilisant la convention de sommation d'Einstein sous les conditions de petites perturbations, la seconde loi de Newton s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \partial_t \rho \partial_t u_i. \quad (3.7)$$

$\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $u$  est le déplacement, et  $\rho$  est la masse volumique. Pour le cas linéaire, efforts et contraintes sont reliés par la loi de comportement :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon + \frac{\nu}{12\nu} \text{tr}(\epsilon) G \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{ref}) G, \quad (3.8)$$

où  $G$  est le tenseur métrique, assimilé à  $I$  dans le cadre d'un repère cartésien.  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson,  $\text{tr}$  est l'opérateur de trace. Le second terme de l'équation 3.8 rend compte d'un possible couplage thermo-mécanique où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique,  $T$  est la température et  $T_{ref}$  est une température de référence pour laquelle les phénomènes thermiques sont supposés nuls. Dans les cas simples où les effets thermiques sont négligés, la loi de Hooke est utilisée :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\epsilon) G \right). \quad (3.9)$$

La relation entre déformation et déplacement est donnée par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.10)$$

En combinant les équations 3.7, 3.8 et 3.10, la formulation en déplacement peut être obtenue :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left( u_{i,jj} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{i,ij} \right) + f_i - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T_{,i} - T_{ref,i}) = \rho \partial_t^2 u_i. \quad (3.11)$$

Pour un déplacement cinématique  $\delta u$  admissible, le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_{mec}} \rho \partial_t^2 u \delta u + \int_{\mathcal{D}_{mec}} \epsilon^t H \delta \epsilon - \int_{\mathcal{D}_{mec}} f \delta u - \int_{\Gamma_{mec}} F_\Gamma \partial_n \delta u, \quad (3.12)$$

où  $H$  est un tenseur globalisant la loi de Hooke, et  $F_\Gamma$  est la pression surfacique.  $\delta \epsilon$  est déduit de  $\delta u$  à l'aide de la relation 3.10.

En parallèle de ces équations, il est possible de montrer (BOSSAVIT 2010) que  $\sigma$  se comporte comme une 2-forme, et que  $\epsilon$  est une 1-forme. Pour le problème d'élasticité, les équations équivalentes utilisant les formes différentielles sont :

$$d\sigma + F = \partial_t \star_\rho \partial_t U, \quad (3.13a)$$

$$\sigma = \star_H \epsilon, \quad (3.13b)$$

$$d\epsilon = 0. \quad (3.13c)$$

Les grandeurs sont regroupées sur la figure 3.2.

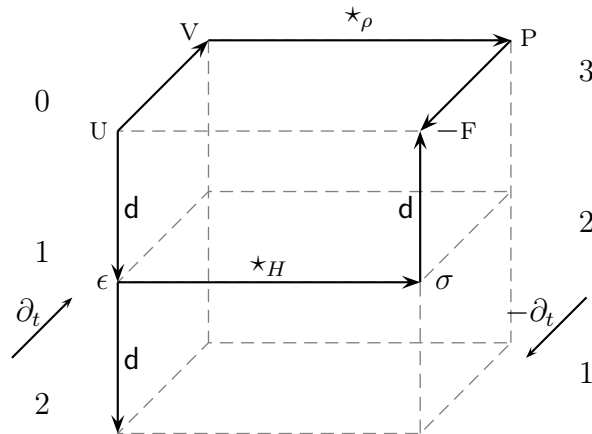


FIGURE 3.2 – Diagramme « de Tonti » pour le problème de mécanique.

### 3.3 Modélisation des phénomènes magnétiques

On rappelle les équations 1.3 à 1.6 vues au chapitre 1 permettant de modéliser les phénomènes magnétiques :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maxwell-Faraday :} & \text{rot } E = -\partial_t B, \\
 \text{Maxwell-Ampère :} & \text{rot } H = J + \partial_t D, \\
 \text{Lois de conservation :} & \text{div } D = \rho, \\
 & \text{div } B = 0.
 \end{array}$$

avec  $E$  le champ électrique,  $B$  l'induction magnétique,  $H$  le champ magnétique,  $D$  l'induction électrique, et  $J$  la densité de courant.

Dans le cas où les longueurs d'onde considérées sont faibles devant les tailles caractéristiques du système (c'est à dire que la relation  $1/c\partial_t \ll \Delta$  sur les opérateurs est justifiée), nommé approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), le système d'équations précédent se réduit à :

$$\text{rot } E = -\partial_t B \qquad \text{div } B = 0, \qquad (3.14a)$$

$$\text{rot } H = J \qquad \text{div } J = 0, \qquad (3.14b)$$

où les deux équations de droite sont des conséquences des équations de gauche. Le système ne saurait être complet sans l'ajout de relations, dites loi de comportement :

$$J = \sigma E, \qquad (3.15a)$$

$$B = \mu H. \qquad (3.15b)$$

Nous avons vu que, en conséquence du Lemme de Poincaré, si une forme est fermée alors elle est au moins localement exacte. Or, dans le cadre de l'ARQS, les relations suivantes sont satisfaites :  $\text{div } B = 0$ ,  $\text{div } J = 0$ . On peut introduire deux champs tels que :

$$B = \text{rot } A, \qquad (3.16a)$$

$$J = \text{rot } T. \qquad (3.16b)$$

$A$  est appelé potentiel vecteur magnétique et  $T$  est le potentiel vecteur électrique. En reportant l'équation 3.16a dans l'équation 3.14a, on remarque qu'un second potentiel noté  $\phi$ , appelé potentiel scalaire électrique, peut être introduit :

$$E = -\partial_t A + \text{grad } \phi. \qquad (3.17)$$



De la même manière, le report de l'équation 3.16b dans l'équation 3.14b permet d'ajouter un potentiel  $\Omega$ , tel que :

$$H = T - \text{grad } \Omega. \quad (3.18)$$

À partir de ces divers potentiels, l'équation de Maxwell-Ampère (3.14b) permet de définir la loi d'évolution dite « formulation électrique » par :

$$\text{rot } \nu \text{ rot } A + \sigma (\partial_t A + \text{grad } \phi) = 0. \quad (3.19)$$

À partir de la relation de Maxwell-Faraday (3.14a) la formulation dite « formulation magnétique » peut être définie :

$$\text{rot } \sigma^{-1} \text{ rot } T + \partial_t [\mu (T - \text{grad } \Omega)] = 0. \quad (3.20)$$

Les formulations variationnelles qui en découlent sont données par :

$$\int_{\mathcal{D}_{mag}} \nu \text{ rot } A \text{ rot } A' + \sigma (\partial_t A + \text{grad } \phi) A' = \int_{\partial \mathcal{D}_{mag}} (\nu \text{ rot } A \times n) A', \quad (3.21a)$$

$$\int_{\mathcal{D}_{mag}} \sigma (\partial_t A + \text{grad } \phi) \text{grad } \phi' = - \int_{\partial \mathcal{D}_{mag}} \phi' J \cdot n, \quad (3.21b)$$

où  $A'$  et  $\phi'$  sont deux champs de même nature que  $A$  et  $\phi$ , respectivement. La formulation magnétique donne :

$$\int_{\mathcal{D}_{mag}} \sigma^{-1} \text{ rot } T \text{ rot } T' + \partial_t [\mu (T - \text{grad } \Omega)] T' = \int_{\partial \mathcal{D}_{mag}} \sigma^{-1} \text{ rot } T \times T', \quad (3.22a)$$

$$\int_{\mathcal{D}_{mag}} \mu (T - \text{grad } \Omega) \text{grad } \Omega' = - \int_{\partial \mathcal{D}_{mag}} \sigma^{-1} \text{ rot } T \times \text{grad } \Omega', \quad (3.22b)$$

où  $T'$  et  $\Omega'$  sont deux champs de même nature que  $T$  et  $\Omega$ , respectivement.

Pour ces deux formulations, des termes sources peuvent être ajoutés, conduisant à la définition de membres de droite. La définition de ces formulations et des conditions qu'elles imposent est courante et se trouve détaillée dans les références MOREAU (2012) et BOUILLAUT (1991).

Les équations du magnétisme se présentent sous la même forme dans le formalisme différentiel. Les équations de Maxwell, dans le cadre de l'ARQS, s'écrivent :

$$dE = -\partial_t B, \quad dE = 0, \quad (3.23a)$$

$$dH = J, \quad dJ = 0. \quad (3.23b)$$

Les lois de comportement sont représentées par des opérateurs de Hodge, chacun indicés par les lois de comportement qu'ils représentent respectivement :

$$B = \star_\mu H, \quad (3.24a)$$

$$J = \star_\sigma E. \quad (3.24b)$$

Ainsi les formulations de l'électromagnétisme sont équivalentes à :

$$d \star_\nu dA - \star_\sigma (\partial_t A + d\phi) = 0, \quad (3.25a)$$

$$d \star_{\sigma^{-1}} dT + \partial_t [\star_\mu (T - d\omega)] = 0. \quad (3.25b)$$

Dans ce cas, outre les opérateurs  $\star$ , les divers champs et opérateurs ne dépendent plus du repère. Il est habituel de représenter les diverses équations sous la forme d'un diagramme (voir figure 3.3).

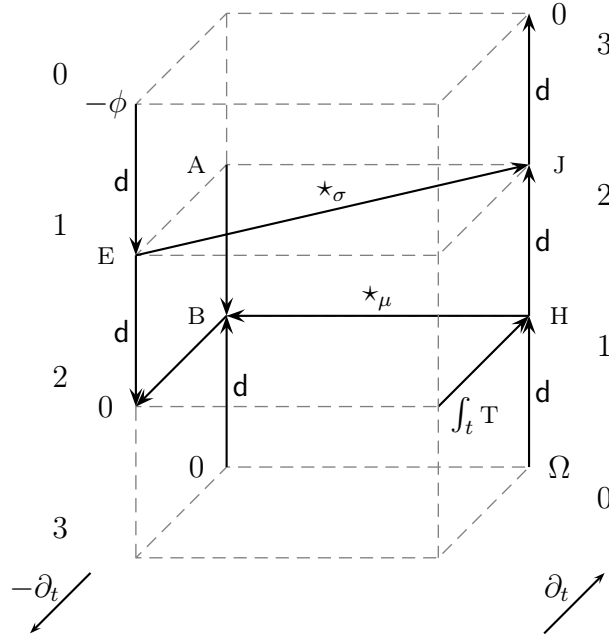


FIGURE 3.3 – Diagramme « de Tonti » pour le problème de magnétisme.



# Chapitre 4

## Formulations discrètes

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Espaces et outils fondamentaux . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4.2</b>	<b>Discrétisation, complexe de Whitney . . . . .</b>	<b>55</b>
4.2.1	Élément de Lagrange . . . . .	55
4.2.2	Élément de Nédélec . . . . .	56
4.2.3	Élément de Raviart–Thomas . . . . .	57
4.2.4	Élément de volume . . . . .	58
4.2.5	Discrétisation des opérateurs différentiels . . . . .	59
4.2.6	Maillage dual . . . . .	60
<b>4.3</b>	<b>Interprétation de la discrétisation . . . . .</b>	<b>61</b>
4.3.1	Premier exemple . . . . .	61
4.3.2	Hodge de Galerkin, application à la magnétostatique . .	62
4.3.3	Cas de la FIT . . . . .	63
<b>4.4</b>	<b>Equations matricielles des systèmes physiques . . . . .</b>	<b>63</b>
4.4.1	Modèle thermique discret . . . . .	63
4.4.2	Modèle mécanique discret . . . . .	64
4.4.3	Modèle magnétique discret . . . . .	64

---

Ce chapitre se concentre sur la définition des espaces et les fonctions nécessaires à la discrétisation des grandeurs physiques, à la base de toute méthode numérique. Nous verrons que l'étape importante réside dans la construction de l'opérateur de Hodge  $\star$ . À discrétisation équivalente, les différentes méthodes numériques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles diffèrent essentiellement dans la manière de construire l'approximation de l'opérateur de Hodge (BOSSAVIT et al. 2003).

Nous commencerons par décrire les espaces vectoriels utilisés et les outils associés, puis nous présenterons les divers types d'éléments finis utilisés. Un exemple de construction de matrice par différentes méthodes permettra d'illustrer les diverses constructions de l'opérateur de Hodge. Enfin, les systèmes matriciels pour les problèmes thermique, mécanique et magnétique seront donnés.

## 4.1 Espaces et outils fondamentaux

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné (à frontière suffisamment régulière), on note par  $\mathcal{L}(\Omega)$  l'espace vectoriel des fonctions à support dans  $\Omega$ , et de carré sommable. On lui confère une structure d'espace de Banach par ajout du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v, \quad (4.1)$$

auquel on joint la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^{1/2}. \quad (4.2)$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont des fonctions indifféremment scalaires ou vectorielles (selon le contexte). On utilise la notation usuelle  $D(\Omega)$  pour définir l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ . Cet espace nous permet entre autre de définir la dérivation. Dans tout ce qui suit, et en particulier en dimension finie, la notion de fonction dérivée est prise au sens des distributions :

$$\begin{aligned} D'(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \partial^\alpha u : \phi &\mapsto \langle \partial^\alpha u, \phi \rangle_{D', D} = (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle_{D, D}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $D'$  est le dual de  $D$ . L'espace  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  n'étant pas suffisamment restrictif, nous utiliserons aussi les espaces de Sobolev  $W^{m,p}$  :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p, \partial^\alpha u \in \mathcal{L}^p, \forall |\alpha| \leq m\}, \quad (4.4)$$

appliqués en particulier au cas  $m = 2$ , pour lequel on nomme les espaces  $\mathcal{H}^p$ . On se concentrera dans ce qui suit au cas  $p = 1$  et  $p = 2$ . On les dote d'une structure de Banach à l'aide du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^p} = \sum_{|\alpha| < p} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v, \quad (4.5)$$

induisant les normes et semi-normes :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| < p} \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

$$|u|_{\mathcal{H}^p(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| = p} \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Pour les champs de l'électromagnétisme, les espaces cités peuvent être trop restrictifs. On introduit les espaces  $\mathcal{H}^p$  définis par :

$$\mathcal{H}^{grad}(\Omega) : \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega), \text{grad } u \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}, \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{H}^{rot}(\Omega) : \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega), \text{rot } u \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}, \quad (4.8b)$$

$$\mathcal{H}^{div}(\Omega) : \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega), \text{div } u \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}, \quad (4.8c)$$

auxquels on adjoint les produits scalaires :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{grad}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v, \quad (4.9a)$$

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{rot}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v + \text{rot } u \cdot \text{rot } v, \quad (4.9b)$$

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{div}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v + \text{div } u \cdot \text{div } v, \quad (4.9c)$$

les normes :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{grad}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 + |\text{grad } u|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.10a)$$

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{rot}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 + |\text{rot } u|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.10b)$$

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{div}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 + |\text{div } u|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.10c)$$

et les semi-normes suivantes :

$$|u|_{\mathcal{H}^{grad}(\Omega)} = \int_{\Omega} \text{grad}^2 u, \quad (4.11a)$$

$$|u|_{\mathcal{H}^{rot}(\Omega)} = \int_{\Omega} \text{rot}^2 u, \quad (4.11b)$$

$$|u|_{\mathcal{H}^{div}(\Omega)} = \int_{\Omega} \text{div}^2 u. \quad (4.11c)$$

On pourra au besoin restreindre ces espaces en  $\mathcal{H}_{\Gamma}^{\mathcal{X}}$  pour lesquels :

$$\mathcal{H}_{\Gamma}^{\mathcal{X}} : \{u \in \mathcal{H}^{\mathcal{X}}, u|_{\Gamma} = f\}, \quad (4.12)$$

où  $f$  est une fonction donnée. En particulier on définit les espaces  $\mathcal{L}_0^2$ ,  $\mathcal{H}_0^{\mathcal{X}}$  comme étant les sous-espaces de ceux précédemment définis pour lesquels les fonctions s'annulent au bord.

On définit l'espace  $\mathcal{H}^{1/2}$  à partir de la restriction de  $\mathcal{H}^1$  à  $\Gamma = \partial\Omega$ . L'opérateur trace vectoriel est donc défini comme :

$$\begin{aligned} t : \mathcal{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathcal{H}^{1/2}, \\ u &\mapsto u|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On définit sur le même schéma la trace normale comme :

$$\begin{aligned} t_n : \mathcal{H}^1 &\rightarrow \mathcal{H}^{-1/2}, \\ u &\mapsto u \cdot n|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

et la trace tangentielle :

$$\begin{aligned} t_t : \mathcal{H}^1 &\rightarrow \mathcal{H}^{-1/2}, \\ u &\mapsto u \times n|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les identités de Green sont alors :

$$\langle u, \text{grad} v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \langle \text{div} u, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u \cdot v \rangle_{\mathcal{H}^1 \mathcal{H}^{-1/2}}, \quad (4.16a)$$

$$-\langle u, \text{rot} v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \langle \text{rot} u, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle u \times v \rangle_{\mathcal{H}^1 \mathcal{H}^{-1/2}}. \quad (4.16b)$$

## 4.2 Discrétisation, complexe de Whitney

Les solutions des équations aux dérivées partielles des modèles décrits ne peuvent généralement pas être déterminées à l'aide de fonctions continues de l'espace (dimension infinie). On choisit pour cela de découper l'espace d'étude en un nombre fini de cellules  $\mathcal{K}$ . Ces cellules forment une partition de l'espace, notée  $\mathcal{T}_h$  :

$$\bigcup_{\mathcal{K}_i \in \mathcal{T}_h} \mathcal{K}_i = \Omega \quad \forall (i, j), i \neq j \quad \mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset. \quad (4.17)$$

On note par  $N_{\mathcal{T}_h}$ ,  $A_{\mathcal{T}_h}$ ,  $F_{\mathcal{T}_h}$ ,  $E_{\mathcal{T}_h}$  le nombre de nœuds, arêtes, faces et éléments, respectivement. À chaque élément du maillage est associé un élément fini, structure faisant correspondre fonctions et topologie. Un élément fini sera formé d'un triplet  $(\mathcal{K}_i, P_{\mathcal{K}}, \sigma_{\mathcal{K}})$  tel que :

- $\mathcal{K}_i$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 0 \dots 3$  correspondant au domaine défini par l'élément ;
- $P_{\mathcal{K}}$  est un espace fonctionnel de dimension finie générant l'espace des fonctions interpolables dans l'élément ;
- $\sigma_{\mathcal{K}}$  est un ensemble de valeurs, les degrés de liberté (DdL), en nombre généralement égal à la dimension de  $P_{\mathcal{K}}$ .

Nous avons vu que les différents domaines de la physique faisaient appel à des formes différentielles de degré  $p = 0, \dots, 3$ . Nous allons introduire quatre types d'éléments finis, les éléments de Lagrange, de Nédélec, de Raviart-Thomas et de volume, respectivement adaptés aux nœuds, arêtes, faces et volumes.

### 4.2.1 Éléments de Lagrange

L'élément le plus courant est probablement l'élément de Lagrange, associé à un nœud  $x_i$  du maillage. On note par  $w_i^n = \lambda_i$  la fonction coordonnée barycentrique, évaluée en  $x$ , par rapport au nœud  $x_i$ . Cette fonction, continue, vaut 1 en  $x_i$ , décroît linéairement dans les éléments adjacents, et est nulle partout ailleurs. Une propriété importante est :

$$\sigma_{\mathcal{K}} = \{d_i^n : P_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto d_i^n = u(x_i)\}, \quad (4.18)$$

ainsi les valeurs des DdL sont les valeurs de la fonction globale  $u$  aux sommets du maillage. L'espace des fonctions engendré par les diverses fonctions de base est noté



$\mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{grad} \subset \mathcal{H}^{grad}$ . Une fonction  $u$  sera générée à partir de l'opérateur d'interpolation :

$$\mathcal{I}^n : \mathcal{H}^{grad} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{grad}, u \mapsto \sum_{i=1 \dots N_{\mathcal{T}_h}} d_i^n w_i^n. \quad (4.19)$$

Cet opérateur a pour propriétés particulières :

$$\forall u \in \mathcal{H}^{grad},$$

$$\|u - \mathcal{I}^n(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq h^2 |u|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}, \quad (4.20a)$$

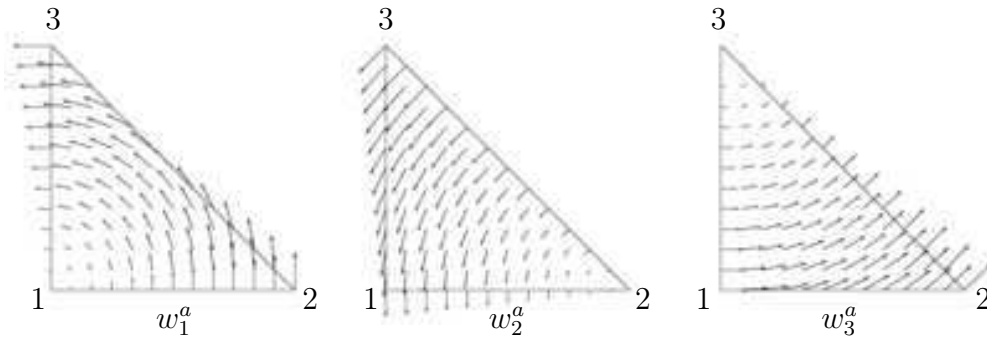
$$|u - \mathcal{I}^n(u)|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq h |u|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}, \quad (4.20b)$$

où  $h$  est une constante dépendant du maillage. On dit que l'erreur d'interpolation en norme  $\mathcal{L}^2$  est en ordre 2, et en ordre 1 pour la semi-norme  $\mathcal{H}^1$  (donc en norme  $\mathcal{H}^{grad}$ ).

## 4.2.2 Éléments de Nédélec

Cet élément est lié à une arête du maillage (NÉDÉLEC 1986 ; BOSSAVIT 1991). Il sera particulièrement adapté aux 1-formes, susceptibles d'être intégrées sur une variété de dimension 1. On définit pour la  $k^{\text{ème}}$  arête (entre les nœuds d'indices  $i$  et  $j$ ) le champ  $w_k^a$  :

$$w_k^a(x) = \lambda_i(x) \text{grad } \lambda_j(x) - \lambda_j(x) \text{grad } \lambda_i(x). \quad (4.21)$$



**FIGURE 4.1** – Tracé, pour un élément bi-dimensionnel des champs générés par les fonctions de base de Nédélec (ERN 2005).

La figure 4.1 présente le profil des fonctions de base pour un élément triangulaire. Le champ créé est orthoradial par rapport au nœud de base et la norme croît linéairement avec la distance à ce nœud. Ainsi, à l'interface entre deux éléments,

seule la composante tangentielle du champ est continue. Pour cet élément fini, les DdL satisfont en particulier :

$$\sigma_K = \{d_i^a : P_K \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto d_i^a = \int_{\text{arête } k} u \cdot t\}. \quad (4.22)$$

Dans ce cas le DdL associé à une arête est la circulation du champ local. L'espace engendré par l'ensemble  $\{w_i^a\}$  est  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{rot} \subset \mathcal{H}^{rot}$ . L'opérateur d'interpolation associé est, par exemple pour un tétraèdre :

$$\mathcal{I}^a : \mathcal{H}^{rot} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{rot}, u \mapsto \sum_{i=1 \dots A\tau_h} d_i^a w_i^a. \quad (4.23)$$

Cet opérateur a pour propriété particulière, si le pavage est régulier :

$$\forall u \in \mathcal{H}^{rot},$$

$$\|u - \mathcal{I}^a(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c h |u|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}, \quad (4.24a)$$

$$\|\text{rot}[u - \mathcal{I}^a(u)]\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq d h |\text{rot } u|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}, \quad (4.24b)$$

où  $c$  et  $d$  sont des constantes. L'erreur d'interpolation est en ordre 1 à la fois en norme  $\mathcal{L}^2$  et pour la semi-norme  $\mathcal{H}^{rot}$  (donc en norme  $\mathcal{H}^{rot}$ ).

### 4.2.3 Éléments de Raviart–Thomas

Cet élément est lié à une face du maillage (RAVIART et THOMAS 1977). Il sera particulièrement adapté aux 2-formes, susceptibles d'être intégrées sur une variété de dimension 2. On définit, dans le cas particulier d'un tétraèdre, pour la  $l^{\text{ème}}$  face (entre les nœuds d'indices  $i$  et  $j$  et  $k$ ) le champ  $w_l^f$  :

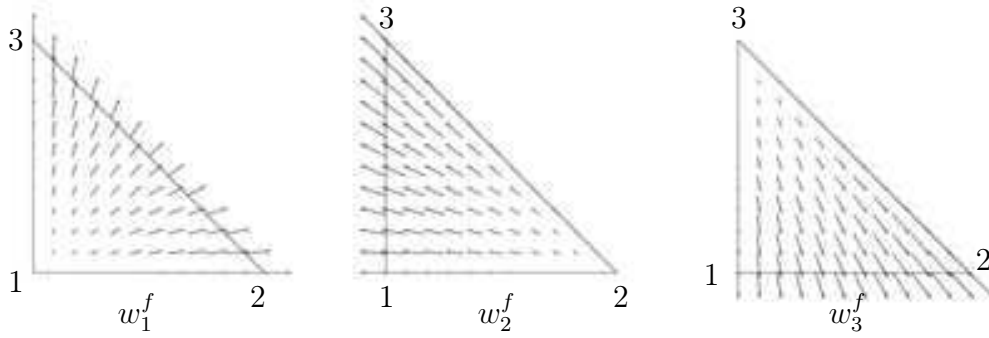
$$w_l^f(x) = 2[\lambda_i(x) \text{grad } \lambda_j(x) \times \text{grad } \lambda_k(x) \quad (4.25)$$

$$+ \lambda_j(x) \text{grad } \lambda_k(x) \times \text{grad } \lambda_i(x) \quad (4.26)$$

$$+ \lambda_k(x) \text{grad } \lambda_i(x) \times \text{grad } \lambda_j(x)]. \quad (4.27)$$

La figure 4.2 présente le profil des fonctions de base pour un élément triangulaire. Le champ défini est radial dans le repère lié au nœud de base, et la norme croît linéairement avec la distance. Ainsi, à l'interface entre deux éléments, seule la composante normale du champ est continue. Pour cet élément fini, les DdL satisfont en particulier :

$$\sigma_K = \left\{ d_i^f : P_K \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto d_i^f = \int_{\text{face } k} u \cdot n \right\}. \quad (4.28)$$



**FIGURE 4.2** – Tracé, pour un élément bi-dimensionnel des champs générés par les fonctions de base de Raviart–Thomas. (ERN 2005)

Dans ce cas le DdL associé à une face est le flux du champ local. L'espace engendré par l'ensemble  $\{w_i^f\}$  est  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{div} \subset \mathcal{H}^{div}$ . L'opérateur d'interpolation associé est :

$$\mathcal{I}^f : \mathcal{H}^{div} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{div}, u \mapsto \sum_{i=1 \dots F_{\mathcal{T}_h}} d_i^f w_i^f. \quad (4.29)$$

Cet opérateur a pour propriété particulière, si le pavage est régulier :

$$\forall u \in \mathcal{H}^{div},$$

$$\|u - \mathcal{I}^f(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq c h |u|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}, \quad (4.30a)$$

$$\|\operatorname{div} [u - \mathcal{I}^f(u)]\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leq d h |\operatorname{div} u|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}, \quad (4.30b)$$

où  $c$  et  $d$  sont des constantes. L'erreur d'interpolation en norme  $\mathcal{L}^2$  est en ordre 1, et en ordre 1 pour la semi-norme  $\mathcal{H}^{div}$  (donc en norme  $\mathcal{H}^{div}$ ).

#### 4.2.4 Éléments de volume

Il est intéressant de définir un dernier type d'élément, associé aux volumes et adapté aux 3-formes. Pour le  $i^{\text{ème}}$  élément  $\mathcal{K}_i$ , on définit la fonction de forme de volume comme :

$$w_i^e(x) = \frac{1}{|\mathcal{K}_i|}, \quad (4.31)$$

où  $|\mathcal{K}_i|$  représente le volume de l'élément. Le DdL associé équivaut à l'intégrale de la fonction :

$$\sigma_{\mathcal{K}} = \{d_i^e : P_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto d_i^e = \int_{\text{élément } i} u\}. \quad (4.32)$$

L'espace engendré par l'ensemble  $\{w_i^e\}$  est un sous-espace de  $\mathcal{L}^2$  noté  $\mathcal{W}^3$ . L'opérateur d'interpolation associé est :

$$\mathcal{I}^f : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{T},u}^2 \mapsto \sum_{i=1 \dots E_{\mathcal{T}_h}} d_i^e w_i^e. \quad (4.33)$$

#### 4.2.5 Discrétisation des opérateurs différentiels

Pour lier ces divers espaces, il faut introduire les matrices d'incidence du maillage (BOSSAVIT et MAYERGOYZ 1998). Notons par  $[G]$ ,  $[R]$ ,  $[D]$  ces matrices, de tailles respectives  $A_{\mathcal{T}_h} \times N_{\mathcal{T}_h}$ ,  $F_{\mathcal{T}_h} \times A_{\mathcal{T}_h}$  et  $E_{\mathcal{T}_h} \times F_{\mathcal{T}_h}$ . Ce sont des matrices à valeur dans  $\{-1, 0, 1\}$ , et définies comme suit :

- le terme élémentaire  $G_{ij}$  vaut 1 si l'arête orientée d'indice  $i$  aboutit au nœud d'indice  $j$ , vaut -1 si l'arête a pour origine le nœud d'indice  $j$ , 0 sinon ;
- le terme élémentaire  $R_{ij}$  vaut 1 si la face orientée d'indice  $i$  possède l'arête d'indice  $j$  et que l'orientation est directe, vaut -1 si l'orientation est inverse, 0 si l'arête n'appartient pas à la face ;
- le terme élémentaire  $D_{ij}$  vaut 1 si le volume orienté positivement d'indice  $i$  contient la face d'indice  $j$  et que la normale de la face est sortante, vaut -1 si la normale est entrante, 0 sinon.

Si un champ discret  $A$  est représenté par sa matrice de DdL  $[A]$ , et si  $B$  est représenté par  $[B]$ , alors les relations suivantes sont vérifiées :

$$A \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{grad}, B \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{rot}, \quad B = \text{grad } A \Leftrightarrow [B] = [G][A], \quad (4.34a)$$

$$A \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{rot}, B \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{div}, \quad B = \text{rot } A \Leftrightarrow [B] = [R][A], \quad (4.34b)$$

$$A \in \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{div}, B \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^2, \quad B = \text{div } A \Leftrightarrow [B] = [D][A]. \quad (4.34c)$$

$$\begin{array}{ccccccc} W^0 & \xrightarrow{\quad [G] \quad} & W^1 & \xrightarrow{\quad [R] \quad} & W^2 & \xrightarrow{\quad [D] \quad} & W^3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{grad} & \xrightarrow{\quad \text{grad} \quad} & \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{rot} & \xrightarrow{\quad \text{rot} \quad} & \mathcal{H}_{\mathcal{T}}^{div} & \xrightarrow{\quad \text{div} \quad} & \mathcal{W}^3 \end{array}$$

**FIGURE 4.3** – Suite des espaces discrets pour le maillage primal. La ligne du bas représente les espaces fonctionnels, les espaces du haut sont homogènes à  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\mathcal{T}_h$  est un pavage cellulaire régulier d'un domaine  $\Omega$  contractile, alors la suite présentée en figure 4.3 est exacte. Les espaces  $W^0$ ,  $W^1$ ,  $W^2$  et  $W^3$  représentent

respectivement  $\mathbb{R}^{N\tau_h}$ ,  $\mathbb{R}^{A\tau_h}$ ,  $\mathbb{R}^{F\tau_h}$  et  $\mathbb{R}^{E\tau_h}$ . Les matrices  $[G]$ ,  $[R]$ ,  $[D]$  sont les approximations discrètes des opérateurs grad, div, rot pour les champs vectoriels, et représentent l'opérateur d pour les formes différentielles.

### 4.2.6 Maillage dual

Le maillage dual est un second maillage, issu du maillage primal (celui concrètement généré par l'outil de discrétisation), et pour lequel à chacune des  $p$ -cellules du maillage primal correspond une  $(3-p)$ -cellule du maillage dual. Ainsi, à chaque nœud du maillage primal correspond un volume du maillage dual, à chaque arête du maillage primal correspond une face du maillage dual...

La construction du maillage dual n'est pas unique. Les deux types de construction les plus courants sont le dual barycentrique et le dual orthogonal. Dans le premier cas les nœuds du maillage dual sont placés au barycentre des éléments primaux, et les arêtes duales passent par le barycentre des faces primales, et sont par conséquent brisées. Le dual orthogonal assure l'orthogonalité entre les éléments des maillages primaux et duaux. Les arêtes ou faces ainsi construites sont droites ou planes, respectivement. En revanche, l'existence du dual orthogonal n'est pas assurée.

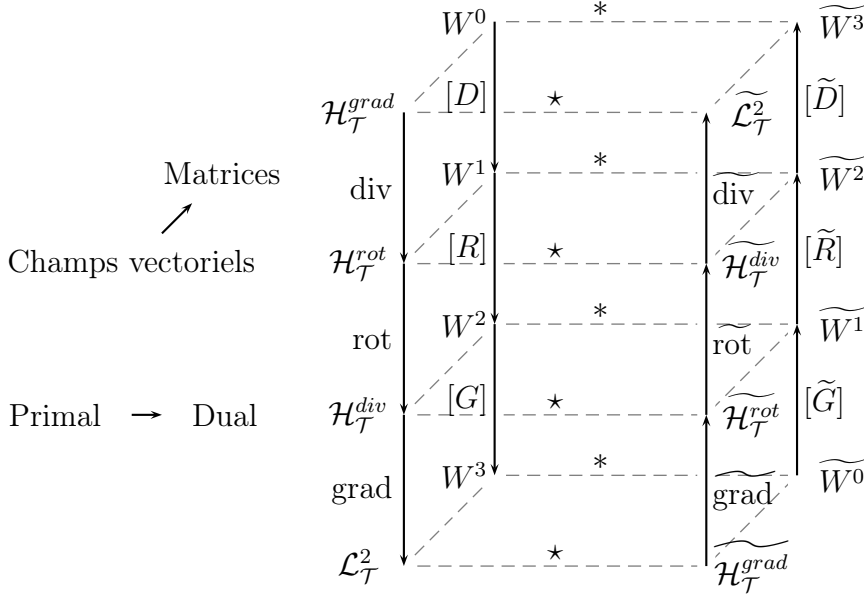
Si les orientations des éléments du maillages dual sont concordantes avec les orientations externes des éléments primaux, alors on peut montrer les relations suivantes (BOSSAVIT et MAYERGOYZ 1998) :

$$[\tilde{G}] = -[D]^\top, \quad (4.35a)$$

$$[\tilde{R}] = [R]^\top, \quad (4.35b)$$

$$[\tilde{D}] = -[G]^\top, \quad (4.35c)$$

où les matrices  $[\tilde{G}]$ ,  $[\tilde{R}]$ ,  $[\tilde{D}]$  sont les matrices d'incidence du maillage dual. Si on considère les espaces générés par les fonctions associées à chaque maillage, alors on peut placer les divers espaces dans un diagramme comme schématisé dans la figure 4.4. Il reste à discrétiser l'opérateur permettant de passer des éléments de dimension  $p$  aux éléments de dimension  $(3-p)$ . L'opérateur permettant ce passage est l'opérateur de Hodge symbolisé par  $\star$ , et sa représentation matricielle est donnée par  $*$ . L'objet de ce qui suit est de montrer, sur un exemple électromagnétique qu'opérateur de Hodge, loi de comportement et matrice de masse sont en liens (KOTIUGA 1984).



**FIGURE 4.4** – Représentation schématique des divers espaces pour le maillage primal et dual. Les étoiles représentent l'opérateur susceptible de faire passer de l'un à l'autre.

### 4.3 Interprétation de la discrétisation

Les valeurs contenues dans les vecteurs de DdL donnent une représentation approchée des formes différentielles associées aux grandeurs physiques. Ces vecteurs, indépendants de la métrique, sont construits à partir des intégrales des formes différentielles sur les variétés définies par le maillage (primal ou dual). C'est la discrétisation des grandeurs physiques. Les formulations de la physique font essentiellement apparaître la dérivée extérieure  $d$ , pour laquelle les diverses discrétisations ont été données.

Il reste à discrétiser l'opérateur  $\star$ , lien manquant entre les grandeurs primales et duales, base des différentes méthodes de résolutions (KOTIUGA 1984).

#### 4.3.1 Premier exemple

Soit l'opérateur  $\mathcal{C}$  permettant de passer des formes différentielles aux représentations matricielles. Pour une forme différentielle  $w$  et sa représentation équivalente

matricielle  $\overline{w}$ , on a en particulier (BOSSAVIT et KETTUNEN 2000) :

$$\overline{w}_i = (\mathcal{C}w)_i = \int_{e_i} w, \quad (\tilde{\mathcal{C}}w)_i = \int_{\tilde{e}_i} w, \quad (4.36)$$

avec l'équation de droite pour le maillage dual. Le complexe de Whitney peut être représenté par l'opération en sens inverse, noté  $\mathcal{W}$ , telle que :

$$\mathcal{W}\overline{w} = w. \quad (4.37)$$

Si l'opérateur de Hodge discret est noté  $*$ , alors la situation idéale serait :

$$* \overline{w} = \tilde{\mathcal{C}} * \mathcal{W}\overline{w}. \quad (4.38)$$

D'après la définition du  $i^{\text{ème}}$  DdL, il vient :

$$*_{ij} = \int_{\tilde{e}_i} \star w, \quad (4.39)$$

qui, en utilisant la fonction de forme  $w_j$ , équivaut à :

$$*_{ij} = \int_{\tilde{e}_i} w_j \cdot t. \quad (4.40)$$

Appliqué à la relation  $\star_\nu B = H$ , l'équation 4.40 devient  $*_{ij} = \int_{\tilde{e}_i} \nu w_j \cdot t$ .

### 4.3.2 Hodge de Galerkin, application à la magnétostatique

Nous allons montrer, sur un exemple simple, comment l'application de la méthode de Galerkin conduit à la réalisation d'un Hodge discret. Considérons la formulation de la magnétostatique en potentiel vecteur  $A$ , écrite sous forme vectorielle et sous forme différentielle :

$$\text{rot } \nu \text{rot } A = J, \quad (4.41a)$$

$$\text{d } \star_\nu \text{d} A = J. \quad (4.41b)$$

Pour simplifier, supposons que la trace de  $A$  est nulle, la méthode de Galerkin appliquée à l'équation 4.41a conduit au système linéaire :

$$[C]^\top [M] [C] [A] = [J]. \quad (4.42)$$

La réécriture de l'équation 4.41b, à l'aide de la discrétisation de  $\mathbf{d}$ , donne :

$$[C]^\top [*_\nu][C][A] = [J]. \quad (4.43)$$

Les termes élémentaires de la matrice  $[M]$  sont :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \nu w_i^a \cdot w_j^a. \quad (4.44)$$

Par identification, la méthode de Galerkin conduit à assembler un Hodge discret identifiable à une matrice de masse.

### 4.3.3 Cas de la FIT

Le cas de la *Finite Integration Technique* (FIT) est intéressant car un maillage dual orthogonal est explicitement créé. On peut montrer (TARHASAARI et al. 1999 ; BOSSAVIT et KETTUNEN 2000) que, dans ce cas, les termes élémentaires sont calculés à partir de la géométrie des éléments. Par exemple, l'opérateur  $*_\mu$  sera donné par :

$$*_{\mu_{ij}} = \delta_{ij} \frac{|\mathcal{F}_i|}{|\widetilde{\mathcal{F}}_i|}, \quad (4.45)$$

où  $|\mathcal{F}_i|$  est la surface de la  $i^{\text{ème}}$  face primale et  $|\widetilde{\mathcal{F}}_i|$  est la longueur de l'arête duale associée. Cette procédure conduit à des matrices diagonales.

## 4.4 Equations matricielles des systèmes physiques

Si les différents opérateurs sont correctement discrétisés, alors les systèmes matriciels à résoudre peuvent aisément être déduits des formulations en remplaçant les opérateurs par leurs formes discrètes. La littérature décrivant la manière d'obtenir les divers systèmes linéaires étant très abondante, on ne présentera ici que la forme finale des équations.

### 4.4.1 Modèle thermique discret

Le modèle discret est décrit par l'équation matricielle :

$$[M_{\rho C_p} \partial_t + G^\top M_\lambda G][T] = [M_1][S], \quad (4.46)$$



avec les termes élémentaires suivants :

$$M_{\rho C_p ij} = \int_{\Omega} \rho C_p w_i^n \cdot w_j^n, \quad (4.47)$$

$$M_{k ij} = \int_{\Omega} k w_i^a \cdot w_j^a, \quad (4.48)$$

$$M_{1 ij} = \int_{\Omega} w_i^n \cdot w_j^n. \quad (4.49)$$

Bien qu'en réalité le code assemble deux matrices de masses, une de type  $\int \rho C_p w_i^n w_j^n$  et une de type  $\int \lambda \text{grad } w_i^n \text{grad } w_j^n$ . Cette approche ne correspond toutefois pas rigoureusement aux formes mises en jeux. La matrice  $[M_1]$  représente le fait qu'il faille exprimer les DdL des sources aux nœuds du maillage primal, alors que celle-ci est une 3-forme définie sur le maillage dual.

#### 4.4.2 Modèle mécanique discret

Le modèle mécanique peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[M_{\rho} \partial_t^2 + G^{\top} W_a^{\top} M_H W_a G][U] = [M_1][F], \quad (4.50)$$

avec les termes élémentaires suivants :

$$M_{\rho ij} = \int_{\Omega} \rho w_i^n \cdot w_j^n, \quad (4.51)$$

$$M_{1 ij} = \int_{\Omega} w_i^n \cdot w_j^n, \quad (4.52)$$

où  $M_H$  est une matrice ne dépendant que des coefficients de Lamé. Cette équation est très théorique puisque l'assemblage réel est réalisé à partir de termes du type  $\int w_i^n w_j^n$ ,  $\int \text{grad } w_i^n \text{grad } w_j^n$  et  $\int w_i^n f$ .

#### 4.4.3 Modèle magnétique discret

La mise en forme détaillée des équations peut être trouvée dans les références HENNERON (2004) ou MOREAU (2012). Les systèmes linéaires sont donnés pour la formulation électrique et pour la formulation magnétique.

**Formulation  $A-\phi$** 

Le système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} R^\top M_\nu R + \partial_t M_\sigma & M_\sigma G \\ G^\top M_\sigma & -G M_\sigma G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

avec les termes élémentaires suivants :

$$M_{\nu ij} = \int_{\Omega} \nu w_i^f \cdot w_j^f, \quad (4.54)$$

$$M_{\sigma ij} = \int_{\Omega} \sigma w_i^a \cdot w_j^a, \quad (4.55)$$

$$J_{0i} = \int_{\Omega} w_i^a \cdot J_0. \quad (4.56)$$

$J_0$  est le courant source imposé dans le système.

**Formulation  $T-\Omega$** 

Le système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} R^\top M_{\sigma^{-1}} R + \partial_t M_\mu & \partial_t M_\mu G \\ G^\top M_\mu & -G M_\mu G \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R^\top M_{\sigma^{-1}} R H_0 - \partial_t M_\mu H_0 \\ -G^\top M_{\sigma^{-1}} H_0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

avec les termes élémentaires suivants :

$$M_{\sigma^{-1} ij} = \int_{\Omega} \sigma^{-1} w_i^f \cdot w_j^f, \quad (4.58)$$

$$M_{\mu ij} = \int_{\Omega} \nu w_i^a \cdot w_j^a, \quad (4.59)$$

$$H_{0i} = \int_{\Omega} w_i^a \cdot H_0. \quad (4.60)$$

$H_0$  est le champ source imposé dans le système, dérivé du courant source  $J_0$  par la formule  $J_0 = \text{rot } H_0$ .



# Conclusion

Cette partie montre, à partir d'exemples simples, que l'utilisation des champs vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  n'est pas forcément la meilleure représentation possible des grandeurs physique et que l'utilisation des formes différentielles paraît plus appropriée. À l'aide d'exemples, nous avons pu constater que les expressions intégrales des grandeurs sont souvent d'une plus grande utilité.

Les outils nécessaires à la bonne compréhension des résultats disponibles dans la littérature, par exemple KOVANEN et al. (2011); TARHASAARI et al. (1999); BOSSAVIT (2004), ou encore BOSSAVIT (2008), ont ensuite été présentés. Dans un effort d'uniformité, les trois domaines de la physique sont présentés à la fois sous leur forme traditionnelle (champs de  $\mathbb{R}^3$ ), mais aussi sous forme réduite.

La discrétisation des équations de la physique sur la base de leur représentation naturelle sous forme différentielle a par la suite été abordée. La discrétisation utilisant le complexe de Whitney permet de faire correspondre champ sous forme différentielle et représentation matricielle. Les différents opérateurs différentiels peuvent être discrétisés, la place de l'opérateur de Hodge étant particulièrement importante (KOTIUGA 1984; TARHASAARI et al. 1999). Enfin, les différents systèmes matriciels ont été assemblés.



## DEUXIÈME PARTIE

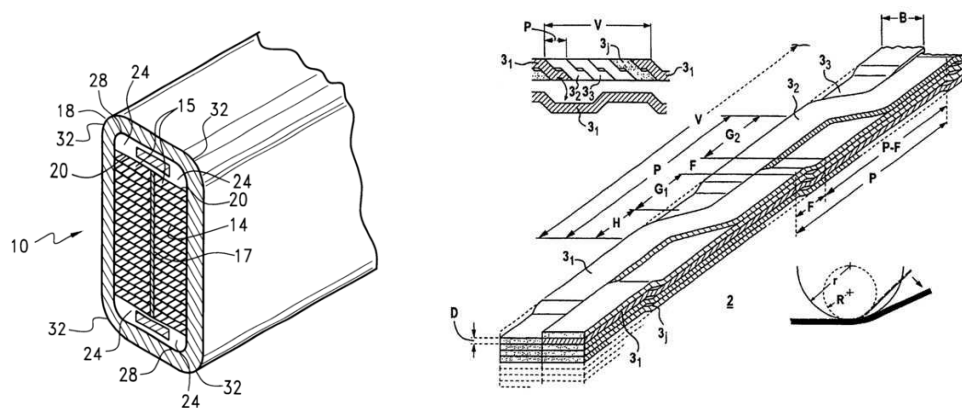
Prise en compte des inducteurs  
bobinés de géométrie complexe



# Introduction

Dans le cadre de la modélisation des efforts appliqués aux cages de développantes, une prise en compte correcte des inducteurs est nécessaire. Les forces appliquées sur les conducteurs dépendent fortement de la répartition des courants qui les traversent. L'objectif de cette partie est d'élaborer un modèle de bobine prenant en compte la structure des barres conductrices des alternateurs.

Les bobines étudiées sont constituées de multiples brins élémentaires formant une structure dite de « Roebel » présentée en figure 5. Les brins sont isolés les uns des autres, de plus leur position verticale et horizontale dans une section varie tout au long de la barre.



**FIGURE 5** – *Structure de Roebel d'une barre de conducteur. Gauche : une section de barre, les brins sont au centre (YOUNSI et al. 2004). Droite : détail des différentes permutations le long du conducteur (ALBRECHT et MASSEK 2004).*

La représentation géométrique de chaque brin étant trop coûteuse, il est nécessaire de déterminer une méthode permettant de créer un modèle homogénéisé



de ces conducteurs. L'obtention de ce modèle requiert deux étapes, la première consistant à construire une représentation de la densité de courant homogénéisée (construction de la densité source) et la seconde corrigeant cette densité pour la rendre compatible avec la formulation électromagnétique par annulation de la divergence.

Cette partie présente les différentes techniques utilisées au cours de ce travail de thèse pour chacune des deux étapes permettant d'obtenir une représentation correcte de la densité de courant circulant dans la développante. Ces deux étapes seront ensuite appliquées à des exemples représentatifs de cas industriels.

# Chapitre 1

## Construction de la densité de courant source

### Sommaire

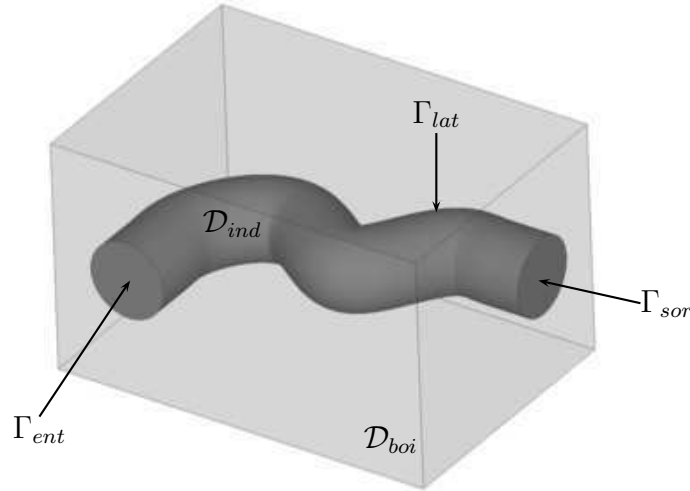
---

<b>1.1</b>	<b>Formules analytiques . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>1.2</b>	<b>Résolution électrocinétique . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>1.3</b>	<b>Méthode des isopotentielles . . . . .</b>	<b>79</b>
1.3.1	Description de la méthode . . . . .	79
1.3.2	Application numérique . . . . .	82
1.3.3	Conclusions . . . . .	84
<b>1.4</b>	<b>Calcul explicite des sections . . . . .</b>	<b>84</b>
1.4.1	Description de la méthode . . . . .	84
1.4.2	Application numérique . . . . .	88
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>90</b>

---

Les formulations de l'électromagnétisme à densité de courant imposée requièrent la détermination d'une densité source discrète. Une approche classique de construction d'une densité source consiste à décomposer le modèle de l'inducteur en élément canoniques (par exemple en sections droites et en coudes) pour lesquels un champ analytique est connu. Pour des inducteurs de géométrie plus complexe, il est possible de résoudre un problème d'électrocinétique dans le conducteur, ou d'utiliser des méthodes géométriques (basées sur les isopotentielles ou sur la construction des sections). L'applicabilité de ces différentes méthodes aux problèmes des cages de développantes est discutée.

Les densités de courant sont discrétisées par des fonctions de formes de type « facettes », les flux étant connus sur les éventuels « ports » d'entrée et de sortie de l'inducteur (surfaces  $\Gamma_{ent}$  et  $\Gamma_{sor}$ ). Par ailleurs, la composante normale de la densité de courant est nulle sur l'enveloppe externe latérale (notée  $\Gamma_{lat}$ ). Les DdL associés aux faces de l'enveloppe externe sont par conséquent nuls. Les différentes notations sont reportées sur la figure 1.1 pour un cas général d'un inducteur courbé avec des ports connectés aux bords du domaine<sup>1</sup>.



**FIGURE 1.1** – Cas général d'un inducteur et notations utilisées.  $\mathcal{D}_{ind}$  représente le domaine de l'inducteur,  $\mathcal{D}_{boi}$  est un domaine simplement connexe englobant  $\mathcal{D}_{ind}$ .

On fera référence à la densité de courant locale au point  $x$  par  $J(x)$ . On y associe une densité normalisée  $N$  pour laquelle le flux au travers de toute section d'inducteur est unitaire. Ainsi le courant source réel vaut  $J_a = n_i I N_a$  avec  $n_i$  le

---

1. Ce cas permet aussi de représenter le cas d'un inducteur fermé avec ajout d'une coupure.

nombre de tours et  $I$  la valeur de la norme du courant pour un brin.  $N_a$  fera référence au champ issu des méthodes de construction, avant le processus d'annulation de la divergence (chapitre 2).

## 1.1 Formules analytiques

L'utilisation de fonctions analytiques est très courante pour la modélisation des inducteurs. Dans le cadre de la modélisation des cages de développantes, différentes sections (sections droites et circulaires, développantes de cônes, coudes à changement de section et pavés tronqués) sont utilisées.

**Sections droites et circulaires** Les sections droites et circulaires sont définies par :

$$N_a(x) = d \quad (\text{droites}) \quad (1.1)$$

$$N_a(x) = e_\theta \quad (\text{circulaires}) \quad (1.2)$$

où  $d$  est le vecteur directeur de la section et  $e_\theta$  est le vecteur unitaire orthoradial des coordonnées cylindriques.

**Développantes de cônes** Il est aussi possible d'utiliser une équation analytique pour les développantes de cônes. Soient les points  $A$  et  $B$  de départ et d'arrivée de la développante, leurs coordonnées cylindriques respectives dans le repère local du cône d'axe  $e_z$  sont notées par  $(\rho_A, \theta_A, z_A)$  et  $(\rho_B, \theta_B, z_B)$ . L'angle  $\alpha$  au sommet du cône est donné par  $\tan \alpha = (\rho_B - \rho_A) / (z_B - z_A)$ . On définit les grandeurs suivantes :

$$\beta_A = \theta_A \sin \alpha, \quad r_A = \frac{\rho_A}{\sin \alpha}, \quad (1.3a)$$

$$\beta_B = \theta_B \sin \alpha, \quad r_B = \frac{\rho_B}{\sin \alpha}. \quad (1.3b)$$

Soient les constantes  $a$  et  $b$  définies par :

$$a = \frac{r_B \sin \beta_B - r_A \sin \beta_A}{r_A r_B (\cos \beta_A \sin \beta_B - \sin \beta_A \cos \beta_B)}, \quad (1.4a)$$

$$b = \frac{r_A \cos \beta_A - r_B \cos \beta_B}{r_A r_B (\cos \beta_A \sin \beta_B - \sin \beta_A \cos \beta_B)}. \quad (1.4b)$$

Les coordonnées d'un point quelconque  $C$ , appartenant à la développante, sont données par  $(\rho_C, \theta_C, z_C)$  telles que :

$$\rho_C = \frac{\sin \alpha}{a \cos \beta_C + b \sin \beta_C}, \quad (1.5a)$$

$$z_C = \frac{\rho_C - \rho_A}{\tan \alpha} + z_A, \quad (1.5b)$$

$$\text{avec } \beta_C = \theta_C \sin \alpha. \quad (1.5c)$$

La tangente locale à la courbe de développante est donnée par :

$$t = (\partial_\theta \rho_C) e_\rho + \rho_C e_\theta + (\partial_\theta z_C) e_z, \quad (1.6)$$

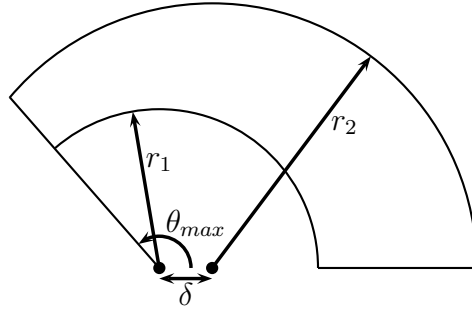
avec :

$$\partial_\theta \rho_C = (a \sin \beta_C - b \cos \beta_C) \left( \frac{\sin \alpha}{a \cos \beta_C + b \sin \beta_C} \right), \quad (1.7a)$$

$$\partial_\theta z_C = \frac{\partial_\theta \rho_C}{\tan \alpha}. \quad (1.7b)$$

Le courant est défini comme tangentiel à la courbe paramétrée  $N_a(x) = t(x)$  en tout point  $x$ .

**Coudes à changement de section** Les extrémités courbées des développantes sont modélisées par un coude avec changement de section (figure 1.2).



**FIGURE 1.2** – Structure et définitions du coude à changement de section.

On suppose le repère local centré sur l'axe du cylindre interne. On dénote par  $\delta$  le décalage entre les deux cylindres et par  $\theta_{max}$  l'angle total formé par le coude. Les rayons des cercles internes et externes sont respectivement notés  $r_1$  et  $r_2$ . Pour un point  $C$  quelconque du coude, de coordonnées cylindriques locales  $(\rho_C, \theta_C, z_C)$ ,

la direction et la norme de la densité de courant sont calculées de façon suivante :

$$\rho_{equ} = \delta \theta_C + \sqrt{\delta^2 (\cos^2 \theta_C - 1) + r_2}, \quad (1.8a)$$

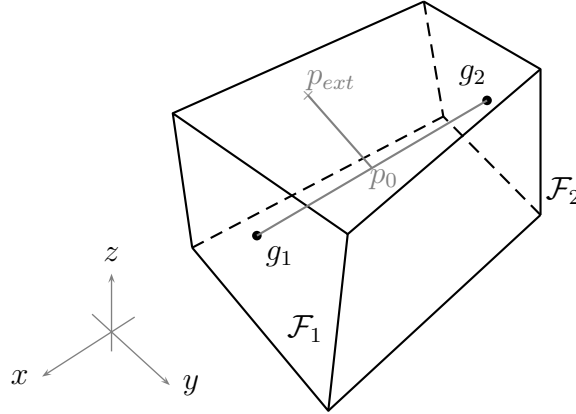
$$r_{equ} = \frac{\rho_C - r_1}{\rho_{equ} - r_1}, \quad (1.8b)$$

$$\theta_{equ} = \tan \frac{\rho_C \sin \theta_C}{\rho_C \cos \theta_C - r_{equ} \delta}, \quad (1.8c)$$

$$S_{equ} = \frac{\theta_{equ}}{\theta_{max}} S_2 + \left(1 - \frac{\theta_{equ}}{\theta_{max}}\right) S_1. \quad (1.8d)$$

$S_1$  et  $S_2$  sont respectivement les sections d'entrée et de sortie du coude. La densité de courant locale est alors donnée par  $N_a(x) = (\sin \theta_{equ}, -\cos \theta_{equ}, 0)$  et pondérée par  $1/S_{equ}$ .

**Pavés tronqués** Pour le cas d'un changement de section entre deux inducteurs droits, il peut être utile de définir les formules analytiques pour un volume possédant deux faces parallèles (voir figure 1.3). Soit  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  les faces d'entrée et de sortie du courant et  $(S_1, S_2)$ ,  $(g_1, g_2)$  leurs surfaces et centres de gravité respectifs (figure 1.3).



**FIGURE 1.3** – *Détail de la géométrie du changement de section.*

Pour un point quelconque  $x$  appartenant à l'inducteur, la détermination de la densité de courant s'effectue en plusieurs étapes :

1. Calcul du projeté  $p_o$  du point  $x$  sur le segment  $[g_1, g_2]$  ;

2. Soit  $d_{equ}$  la position relative de  $p_o$ , on calcule la section locale  $\mathcal{F}_{equ}$  :

$$d_{equ} = \frac{\|p_o - g_1\|_{\mathcal{L}^2}}{\|g_2 - g_1\|_{\mathcal{L}^2}}, \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{F}_{equ} = d_{equ}\mathcal{F}_1 + (1 - d_{equ})\mathcal{F}_2. \quad (1.9b)$$

3. On définit le point appartenant à la surface externe  $p_{ext}$  comme l'intersection entre la demi-droite  $[p_o, x)$  et  $\partial\mathcal{F}_{equ}$ . De même, les points  $p_1$  et  $p_2$  sont les points de la surface latérale, appartenant respectivement aux faces  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , intersection de  $\partial\mathcal{F}_1$  et la courbe du bord  $\partial\mathcal{F}_2$  avec le plan  $(x, g_1, g_2)$ .
4. Soit le rapport de distance avec la surface externe  $d_{ext} = \|x - p_o\| / \|p_o - p_{ext}\|$ , la valeur de la surface de pondération  $S_{equ}$  et la densité de courant locale  $N_a$  sont déterminées par :

$$S_{equ} = d_{equ}S_1 + (1 - d_{equ})S_2, \quad (1.10a)$$

$$N = d_{ext} \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|} + (1 - d_{ext}) \frac{g_2 - g_1}{\|g_2 - g_1\|}. \quad (1.10b)$$

## 1.2 Résolution électrocinétique

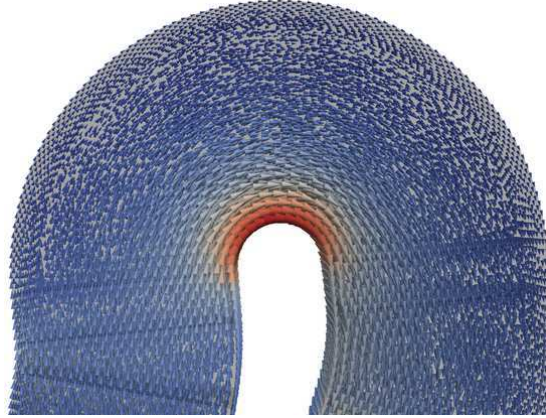
Si l'inducteur ne peut pas être décomposé en éléments simples, une opération classique consiste à résoudre au préalable un problème d'électrocinétique de la forme :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \phi = 0, \quad (1.11a)$$

$$\phi|_{\Gamma_{sor}} = 0, \quad \phi|_{\Gamma_{ent}} > 0 \quad \text{et} \quad \partial_n \phi|_{\Gamma_{lat}} = 0. \quad (1.11b)$$

Le potentiel scalaire  $\phi$  est discrétisé à l'aide d'éléments nodaux ;  $\sigma$  est une loi de comportement homogène. Tous les nœuds du maillage sont considérés comme inconnus, sauf ceux sur les surfaces d'entrée et de sortie imposant la création d'une coupure dans le cas d'un inducteur fermé. La composante normale de la densité de courant étant nulle, une condition de Neumann homogène est ajoutée sur la surface  $\Gamma_{lat}$ . Cependant, du fait de la présence de la loi de comportement  $\sigma$ , la densité de courant calculée  $J = -\sigma \operatorname{grad} E$  appartient au maillage dual et n'est pas correctement définie sur les faces (en pratique la grandeur est constante par élément).

Cette méthode peut également faire apparaître, pour les faibles rayons de courbure, des valeurs non uniformes sur les sections. La figure 1.4 présente la distribution de la densité de courant source pour le coude supérieur d’une développante obtenue par résolution électrocinétique. La répartition du courant n’étant pas uniforme par section, elle ne représente pas correctement l’inducteur homogénéisé.



**FIGURE 1.4** – Exemple de densité de courant source calculée par la méthode électrocinétique.

## 1.3 Méthode des isopotentielles

### 1.3.1 Description de la méthode

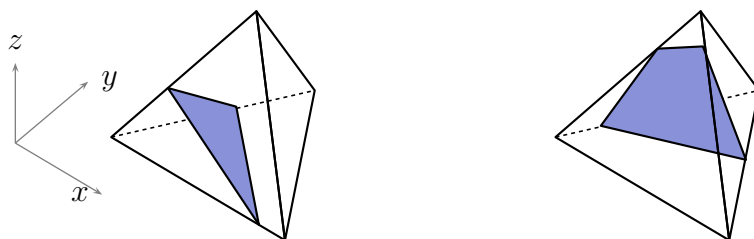
Pour pallier au problème de non uniformité de la densité de courant, une étape de correction est nécessaire. CHANG (2002) présente une méthode permettant, à partir de la résolution électrocinétique précédente, de corriger la norme de la densité source tout en préservant sa direction.

Des sections sont déterminées à partir des isopotentielles de  $\phi$ , le calcul de leur surface permettant de déterminer les valeurs locales de la norme de la densité. En pratique une intégrale numérique à un nombre réduit de points de Gauss est suffisante, une isopotentielle devant être calculée pour chaque point. Pour des inducteurs correctement maillés, une intégrale à 1 ou 3 points de Gauss donne des résultats satisfaisants. La divergence de la solution obtenue par cette méthode n’est pas nulle, il n’est donc pas nécessaire de calculer de manière précise le flux de facette, celui-ci sera par la suite corrigé pour obtenir une divergence nulle. Pour des



maillages de grandes tailles, une double boucle sur les éléments peut rapidement devenir coûteuse. Nous avons utilisé une méthode par avance frontale<sup>2</sup>, permettant de ne tester que les éléments appartenant effectivement à la surface isopotentielle. Le détail de l'algorithme global de correction des normes est donné (dans le cas des tétraèdres) dans l'algorithme 1.1.

Le gradient de  $\phi$  étant constant par élément, il est arbitrairement choisi de définir la direction de la densité comme la moyenne des directions unitaires données par le gradient des deux éléments séparant une face. Les sections avec un élément sont des triangles ou des quadrilatères (voir la figure 1.5), il subsiste des cas particuliers pour lesquels la surface isopotentielle passe par un ou plusieurs sommets de tétraèdre. Le traitement de ces différents cas dégénérés est donné dans l'algorithme 1.2.



**FIGURE 1.5** – Cas possibles d'isopotentielle locale à un élément.

---

2. Cette technique sera plus largement détaillée au chapitre 3.

---

**ALGORITHME 1.1** – *Algorithme de correction des normes, exemple pour des tétraèdres.*


---

**Données** : Le maillage et la solution du problème d'électrocinétique  $\{\phi_i\}$

**Résultat** : Valeurs des DdL pour chaque face  $\{N_i\}$  de la fonction  $N$

```

1  pour chaque face  $\mathcal{F}_i$ , séparant les éléments  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  faire
2      Initialisation de la direction de la densité par  $d$  :

          
$$d_{\mathcal{K}_1} = \frac{\text{grad } \phi|_{\mathcal{K}_1}}{\|\text{grad } \phi|_{\mathcal{K}_1}\|_{\mathcal{L}^2}}, \quad d_{\mathcal{K}_2} = \frac{\text{grad } \phi|_{\mathcal{K}_2}}{\|\text{grad } \phi|_{\mathcal{K}_2}\|_{\mathcal{L}^2}}, \quad d = \frac{d_{\mathcal{K}_1} + d_{\mathcal{K}_2}}{\|d_{\mathcal{K}_1} + d_{\mathcal{K}_2}\|_{\mathcal{L}^2}}; \quad (1.12)$$


      pour chaque point de Gauss  $P$  faire
3          Initialisation de la liste des éléments à tester  $L$  avec les deux éléments  $\mathcal{K}_1$ 
          et  $\mathcal{K}_2$  séparés par la face  $\mathcal{F}_i$  ;
4          Initialisation de la surface  $S$  à 0 ;
5          Décoloration de tous les éléments ;
6          Calcul du potentiel  $\phi(P)$  du point  $P$  ;
7          tant que  $L$  est non vide faire
8              Retirer et colorer le premier élément  $\mathcal{K}_i$  de la liste  $L$  ;
9              Soient les potentiels locaux à l'élément  $\{\phi_{loc}\}$  ;
10             si  $\{\phi_{loc}\} \geq \phi(P)$  ou  $\{\phi_{loc}\} \leq \phi(P)$  alors
11                 si  $\{\phi_{loc}\} = \phi(P)$  alors
12                     | Cas non conforme, arrêt ;
13                 sinon
14                     | Pas de surface équipotentielle, retour en 7 ;
15                 fin
16             sinon si un seul élément  $\phi'_{loc}$  t.q.  $\phi'_{loc} < \phi(P)$  ou  $\phi'_{loc} > \phi(P)$  alors
17                 si  $\phi'_{loc} \in \{\phi_{loc}\}$  alors
18                     | Traitement d'un cas dégénéré et retour en 7 ;
19                 fin
20                 La surface équipotentielle est formée d'un triangle  $\mathcal{T}$  ;
21                  $S = S + |\mathcal{T}|$  ;
22                 Ajout à  $L$  des voisins de  $\mathcal{K}_i$ , non colorés, partageant une face
                 coupée par l'isopotentielle ;
23                 Retour en 7 ;
24             sinon si deux éléments  $(\phi'_{loc}, \phi''_{loc})$  t.q.  $(\phi'_{loc}, \phi''_{loc}) > \phi(P)$  ou
              $(\phi'_{loc}, \phi''_{loc}) < \phi(P)$  alors
25                 si  $\phi(P) \in \{\phi_{loc}\}$  alors
26                     | Traitement d'un cas dégénéré et retour en 7 ;
27                 fin
28                 La surface équipotentielle est formée d'un quadrangle  $\mathcal{Q}$  ;
29                  $S = S + |\mathcal{Q}|$  ;
30                 Ajout à  $L$  de tous les voisins non colorés de  $\mathcal{K}_i$  ;
31                 Retour en 7 ;
32             fin
33         fin
34     fin
35 fin

```

---

---

**ALGORITHME 1.2** – *Traitement des cas dégénérés pour l'algorithme de correction des normes.*

---

**Données :**  $\phi(P)$ ,  $\mathcal{K}_i$ , ensemble des valeurs nodales locales à l'élément  $\{\phi_{loc}\}$

**Résultat :** Nouvelle valeur de  $S$  et mise à jour de la liste  $L$

```

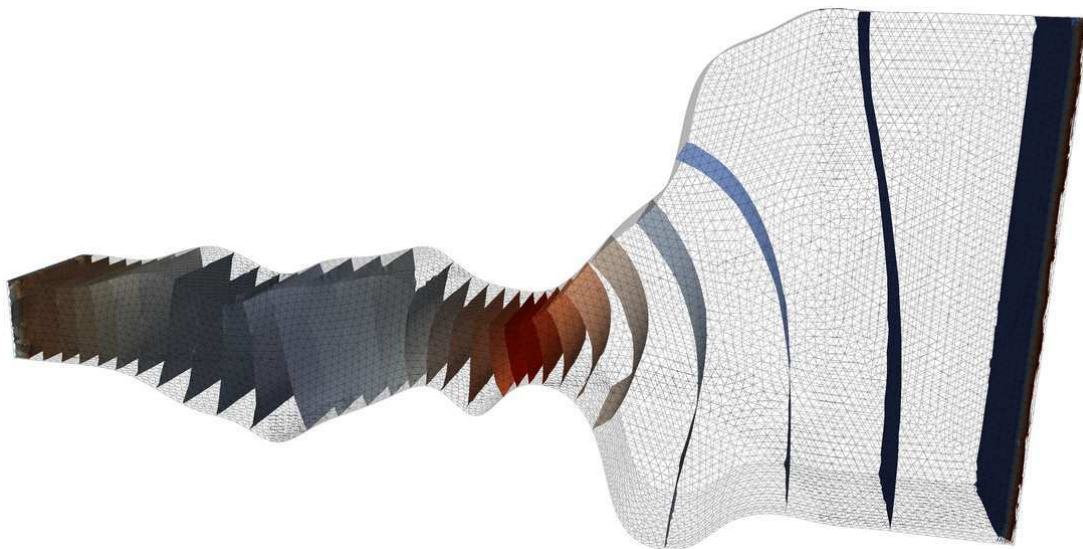
1  Coloration de  $\mathcal{K}_i$  ;
2  si une seule occurrence de  $\phi(P)$  dans  $\{\phi_{loc}\}$  alors
3      La surface équipotentielle est formée d'un triangle  $\mathcal{T}$  pouvant être dégénéré à
        un sommet ;
4      Ajout à  $L$  des éléments non colorés de la boule du sommet  $S$  pour lequel
         $\phi(S) = \phi(P)$  ;
5      Si nécessaire, ajout à  $L$  du voisin opposé à  $S$  si la surface équipotentielle
        intersecte la surface de séparation ;
6  sinon si deux occurrences de  $\phi(P)$  dans  $\{\phi_{loc}\}$  alors
7      La surface équipotentielle est formée d'un triangle  $\mathcal{T}$  pouvant être dégénéré à
        une arête ;
8      Ajout à  $L$  de tous les voisins non colorés de  $\mathcal{K}_i$  ;
9  sinon si trois occurrences de  $\phi(P)$  dans  $\{\phi_{loc}\}$  alors
10     La surface équipotentielle est formée de la face  $\mathcal{T}$  formée par les trois sommets
        de l'élément pour lesquels les DdL sont égaux à  $\phi(P)$  ;
11     Ajout à  $L$  des voisins non colorés de  $\mathcal{K}_i$ , hormis celui partageant la face  $\mathcal{T}$  ;
12 fin
13 Si nécessaire,  $S = S + |\mathcal{T}|$  ;

```

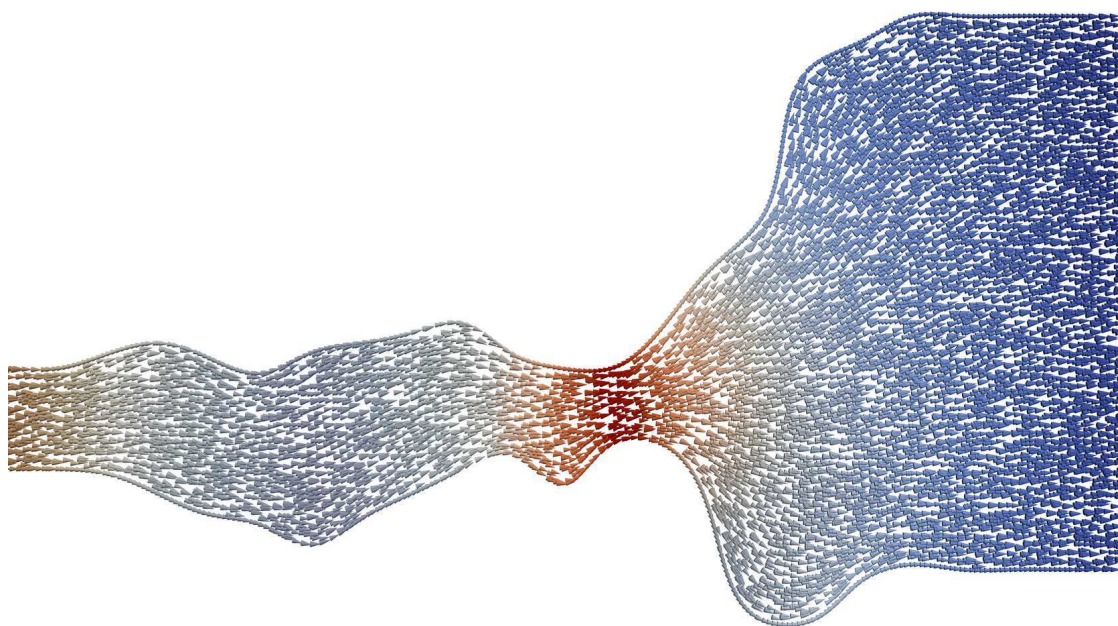
---

### 1.3.2 Application numérique

L'inducteur choisi pour l'application numérique est présenté sur la figure 1.6 avec ajout des isopotentiellles de  $\phi$ . La structure est constituée d'une face de forme quelconque extrudée dans une des directions de l'espace. Le maillage est constitué de 460 000 tétraèdres. Le courant est présenté sur la figure 1.7, pour plus de visibilité les flèches sont tracées en échelle logarithmique, la couleur dépendant proportionnellement de la norme de la densité de courant. On constate que la répartition de la norme suit le profil des isopotentiellles. De part la déformation des surfaces, cette répartition peut ne pas rendre compte correctement d'un inducteur bobiné homogénéisé.



**FIGURE 1.6** – Inducteur de géométrie quelconque avec le tracé des isopotentiellles, mettant en évidence la déformation des surfaces.



**FIGURE 1.7** – Coupe de la densité de courant dans l'inducteur après correction de la norme par la méthode des isopotentiellles.

### 1.3.3 Conclusions

La méthode des isopotentielle a l'avantage d'être robuste (non soumise à des conditions sur la géométrie). L'utilisation des algorithmes décrits permet de grandement réduire le coût de calcul ce qui permet l'application de la méthode à de grands problèmes (par exemple les têtes de bobines pouvant représenter plusieurs millions d'éléments). Cependant lorsque la section de l'inducteur est très changeante, plus particulièrement pour de grands angles d'ouverture (voir la figure 1.6), les isopotentielle peuvent être déformées entraînant une surestimation de la section réelle. La méthode de calcul explicite des sections a été élaborée pour tenter de répondre à ce problème.

## 1.4 Calcul explicite des sections

Nous avons défini la densité de courant homogénéisée comme étant :

- à flux constant par section ;
- de norme constante par section orthogonale au chemin de l'inducteur ;
- de direction du courant uniformément interpolé entre la direction tangentielle (pour des points de la surface latérale) et la direction orthogonale (pour le centre de masse de la section).

Une autre technique de génération du champ consiste à construire explicitement ces sections à l'aide d'un algorithme de minimisation permettant de déterminer une succession de plans orthogonaux à l'inducteur.

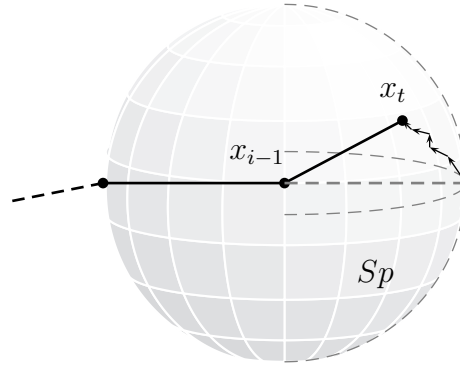
### 1.4.1 Description de la méthode

Soit  $\mathcal{S}_i$  la section principale de l'inducteur par le plan de normale  $n_i$  passant par le point  $p_i$ . On note  $S_i$  la surface de cette intersection et  $L_i$  la longueur de  $\partial\mathcal{S}_i$ . On ajoute la grandeur suivante :

$$T_i = \int_{\partial\mathcal{S}_i} [n(s) \cdot n_i]^2 dl, \quad (1.13)$$

où  $n(s)$  est la normale locale à la surface externe au point. Ce critère représente l'orthogonalité globale de la section par rapport à l'inducteur.

L'algorithme cherche à minimiser un critère composé des valeurs pondérées de  $S_i$ ,  $L_i$  et  $T_i$ . Le point optimal  $x_i$  est cherché sur une sphère centrée sur  $x_{i-1}$  et de



**FIGURE 1.8** – Exemple schématique de la recherche de la section optimale à l'aide du gradient contraint sur une sphère.

rayon  $l_0$  donné (figure 1.8). Contraindre le point sur la sphère permet d'améliorer le comportement global de la méthode dans les zones à fort rayon de courbure. On note le critère global  $c_i$ , défini comme :

$$c_i = S_i + \gamma L_i + \chi T_i, \quad (1.14)$$

où  $\gamma$  et  $\chi$  sont des coefficients de pondération permettant de réduire l'influence des valeurs de  $L_i$  et de  $T_i$  par rapport à  $S_i$ . Il est généralement préférable de ne se concentrer que sur la minimisation de la surface d'intersection. Cependant, pour des inducteurs de géométrie très complexe, il peut être utile de mélanger les trois critères afin d'optimiser la détermination des sections orthogonales.

La détermination du point optimal  $x_{opt}$  est réalisée par une recherche du type gradient avec pas variable. La fonction gradient du critère n'est pas connue et doit être numériquement évaluée à partir de points de calculs. Pour ce faire, un repère sphérique local  $(\rho, \theta, \phi)$ , de centre  $x_{i-1}$ , dans lequel le vecteur  $x_i - x_{i-1}$  est orienté dans la direction verticale, est construit. Les coordonnées initiales de  $x_i$  sont alors  $(\rho, 0, 0)$ . L'algorithme global est donné en 1.3.

De part l'approximation géométrique de la surface latérale, le pseudo-gradient ainsi calculé est bruité. Il convient donc de limiter le nombre d'itérations possibles dans la boucle. De plus, pour obtenir une ligne médiane lisse, un terme d'amortissement est ajouté grâce au coefficient  $\lambda$ . Le point suivant  $x_i$  est calculé comme suit :

$$x_i = (1 - \lambda)x_{opt} + \frac{\lambda}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{i-k}, \quad (1.16)$$

**ALGORITHME 1.3** – *Algorithme du gradient pour la recherche des sections.*

**Données** :  $x_{i-2}$  et  $x_{i-1}$ , distance d'avance  $l_0$ , nombre maximal de boucle  $n_{max}$  et angle maximal  $\theta_{max}$

**Résultat** : Valeur optimale locale  $x_{opt}$

- 1 Initialisation  $x_t$ , point courant de recherche, à  $(x_{i-1} - x_{i-2}) + x_{i+1}$  ;
- 2 Initialisation de  $\theta_{loc}$  à la référence  $\theta_0$  ;
- 3  $k = 1$  ;
- 4 **tant que**  $\theta_{loc} > \theta_{max}$  **ou**  $k < n_{max}$  **faire**
- 5     Mise à jour du repère local de centre  $x_{i-1}$ , direction  $x_t$  ;
- 6      $n_i = x_t - x_{i-1} / \|x_t - x_{i-1}\|$ ,  $p_i = x_t$  ;
- 7     Calcul du critère  $c_i$  pour les points  $P_0 = x_t = (l_0, 0, 0)$ ,  $P_1 = (l_0, -\theta_{loc}, 0)$ ,  
 $P_2 = (l_0, 0, -\theta_{loc})$ ,  $P_3 = (l_0, \theta_{loc}, 0)$ ,  $P_4 = (l_0, 0, \theta_{loc})$  ;
- 8     Soient  $(a, b)$  tels que  $P_a$  et  $P_b$  soient les points de plus petits critères, avec  
 $c_i(P_a) \leq c_i(P_b)$  ;
- 9     Calcul du gradient  $\text{grad}_{c_i}$  :
$$\text{grad}_{c_i} \approx \frac{c_i(P_a) - c_i(P_b)}{l_0 \sin \phi_{P_a} (\theta_{P_a} - \theta_{P_b})} e_\theta + \frac{c_i(P_a) - c_i(P_b)}{l_0 (\phi_{P_a} - \phi_{P_b})} e_\phi ; \quad (1.15)$$
- 10     **si**  $a = 0$  **alors**  $\theta_{loc} = \theta_{loc}/2$  ;
- 11      $x_t = x_t - l_0 \sin \theta_{loc} \text{grad}_{c_i}$ , projection radiale de  $x_t$  sur la sphère ;
- 11      $k = k + 1$  ;
- 12 **fin**
- 13  $x_{opt} = x_t$  ;

où  $n_i$  représente le nombre de points précédents à considérer pour l'amortissement.

Le calcul des sections suppose que la section considérée  $\mathcal{S}_i$  définit un domaine étoilé par rapport au point  $x_i$  considéré. Le calcul est initialisé par une face  $\mathcal{F}_0$  coupée par le plan  $\mathcal{P}$  support de  $\mathcal{S}_i$ . Cependant l'intersection entre l'inducteur et le plan  $\mathcal{P}$  peut définir plusieurs surfaces (par exemple si l'inducteur fait une boucle). Il convient de tester que la face  $\mathcal{F}_0$  n'appartient pas à une section « distante » : si  $b$  est le barycentre de  $\mathcal{F}_0$ , alors le segment  $[x_i, b]$  doit couper la surface  $\Gamma_{lat}$  uniquement en  $b$ . Pour optimiser le calcul de l'intersection, on ne teste que la face voisine partageant une arête coupée par  $\mathcal{P}$ . On obtient ainsi un nuage de points d'intersections déjà ordonné dans un des deux sens trigonométriques. Ainsi, outre le fait de n'avoir testé qu'un nombre minimal de faces, le calcul de la surface et de la longueur de  $\mathcal{S}_i$  est simple : il suffit de ne considérer que l'aire des triangles formés par  $x_i$ , deux points d'intersections successifs<sup>3</sup>, et la longueur des arêtes formées par

3. L'union de ces triangles forme  $\mathcal{S}_i$  alors que leur intersection est vide. L'aire de  $\mathcal{S}_i$  est donc

ces deux points d'intersections successifs.

L'algorithme global se termine lorsque la ligne définie par  $\mathcal{C}_{opt} \{[x_{i-1}, x_i], i = 0 \dots k\}$  coupe la surface  $\Gamma_s$ . Pour chaque segment  $[x_{i+1}, x_i]$ , une section est calculée dans la direction  $n_i = [x_{i+1}, x_i]$  au point  $p_i = x_{i+1} + x_i/2$ . Cet ensemble d'intersections permet de calculer, pour un point  $x$  quelconque, le champ  $N$  à partir des deux sections les plus proches. Soit  $p_o$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\mathcal{C}_{opt}$ , la section de référence  $S_i$  est sélectionnée si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $p_o$  appartient au segment  $[x_{i-1}, x_i]$  ;
- à défaut, la distance  $\|p_o - x_{i-1}\|$  est minimale.

Dans ce cas le champ  $N$  est donné à partir des sections entourant le point  $x$  à partir des formules suivantes :

$$N = \frac{d_e}{S_e} , \quad (1.17a)$$

$$d_e = \begin{cases} (1 - r_b)[(0, 5 - r_s)n_{i-1} + (0, 5 + r_s)n_i] + r_b t_b & \text{si } r_s < 0, 5 , \\ (1 - r_b)[(1, 5 - r_s)n_i + (-0, 5 + r_s)n_{i+1}] + r_b t_b & \text{si } r_s > 0, 5 , \end{cases} \quad (1.17b)$$

$$S_e = \begin{cases} (0, 5 - r_s)S_{i-1} + (0, 5 + r_s)S_i & \text{si } r_s < 0, 5 , \\ (1, 5 - r_s)S_i + (-0, 5 + r_s)S_{i+1} & \text{si } r_s > 0, 5 , \end{cases} \quad (1.17c)$$

$$r_s = \frac{\|p_o - x_{i-1}\|}{\|x_i - x_{i-1}\|} , \quad (1.17d)$$

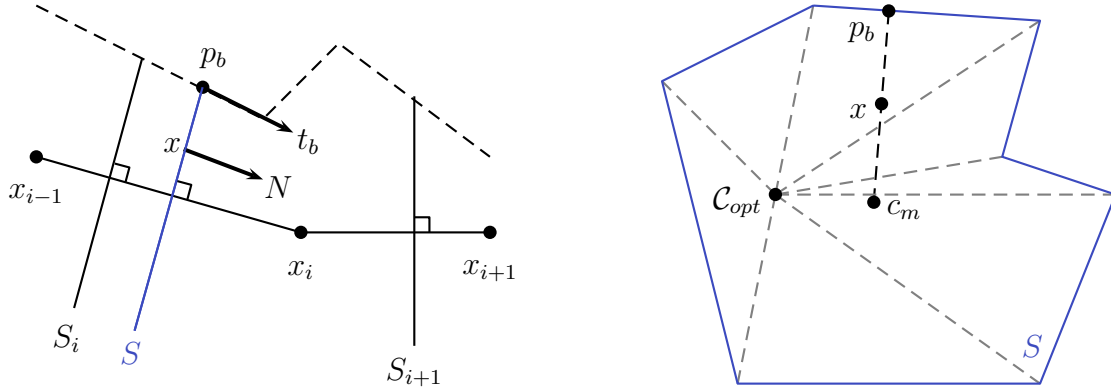
$$r_b = \frac{\|x - c_m\|}{\|p_b - c_m\|} , \quad (1.17e)$$

où  $S_e$  représente la section équivalente, linéairement interpolée entre les valeurs de  $[S_{i-1}, S_i]$  ou  $[S_i, S_{i+1}]$  suivant la position de  $x$  par rapport à la section de référence sélectionnée. De la même manière, la direction équivalente  $d_e$  est linéairement interpolée entre la direction de référence, donnée par  $(0, 5 - r_s)n_{i-1} + (0, 5 + r_s)n_i$  ou  $(1, 5 - r_s)n_i + (-0, 5 + r_s)n_{i+1}$ , et la tangente au bord  $t_b$ . Cette tangente est calculée au point  $p_b$ , point d'intersection entre la surface latérale  $\Gamma_{lat}$  et la demi-droite  $[c_m, x]$  où  $c_m$  représente le centre de masse de la section.  $r_s$  et  $r_b$  sont les rapports de distances permettant de calculer les interpolées ainsi définies. La figure 1.9 présente la localisation des différents points dans l'espace.

---

donnée par la somme des aires de ces triangles élémentaires.





**FIGURE 1.9** – Coupe de face et de profil de l'inducteur permettant de localiser les différents points utilisés. La section locale est donnée en bleu.

### 1.4.2 Application numérique

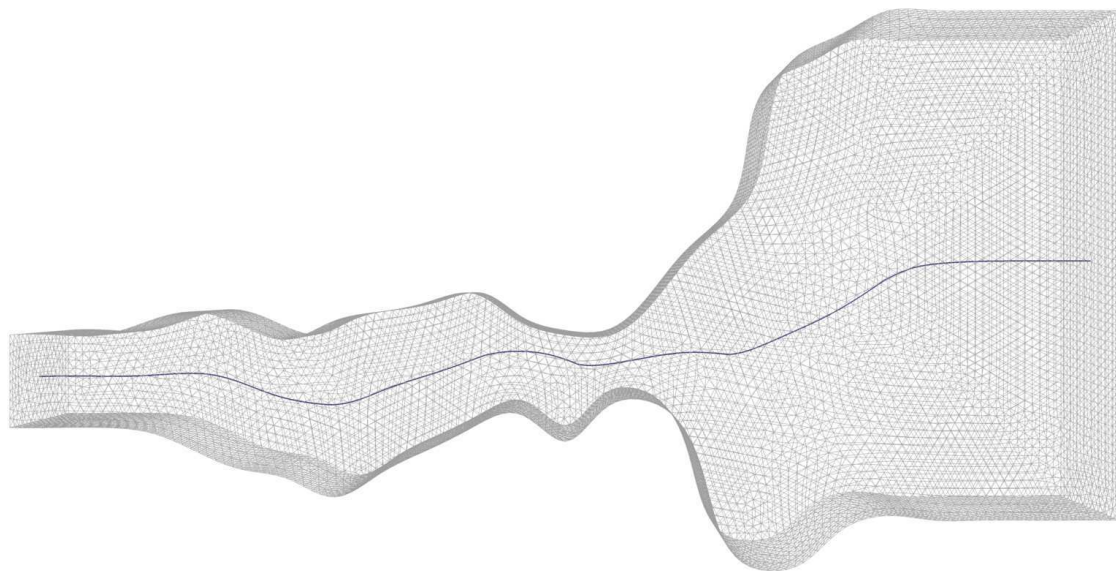
Le cas test de la section 1.3.2 est utilisé. Deux maillages sont ajoutés pour évaluer le coût en temps de calcul en fonction de la taille du maillage. La table 1.1 donne les temps de calculs pour chacun des trois maillages. Les efforts de programmation (suppression de boucles, nombre de tests restreint...) ont été apportés à l'algorithme de détermination des sections optimales, dont le temps d'exécution est sensiblement en  $\sqrt{N_e}$  où  $N_e$  est le nombre d'éléments présents dans l'inducteur. Au cours de ce travail de thèse, le calcul final du champ  $N_a$  a pu être réalisé de manière simple, cependant il peut encore être optimisé en évitant les calculs redondants, en tirant parti de la topologie du maillage ainsi qu'en réduisant les domaines de recherche. Les temps donnés dans la seconde colonne de la table 1.1 peuvent ainsi être considérablement réduits.

Nb. éléments	Temps $\mathcal{C}_{opt}$ (s)	Temps total (s)
4 000	3	5
32 000	9	34
460 000	40	3940

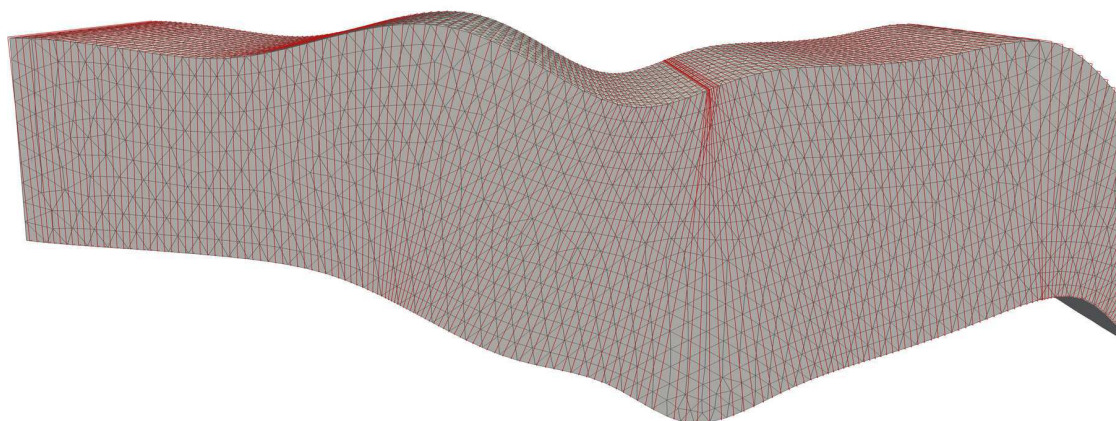
**TABLE 1.1** – Temps de calcul des sections optimales et temps total (construction des sections et détermination du champ) en fonction du nombre de mailles.

La figure 1.10 présente un exemple de courbe  $\mathcal{C}_{opt}$  calculée pour le plus fin des trois maillages, un exemple de section optimisée est présenté sur la figure 1.11. Le

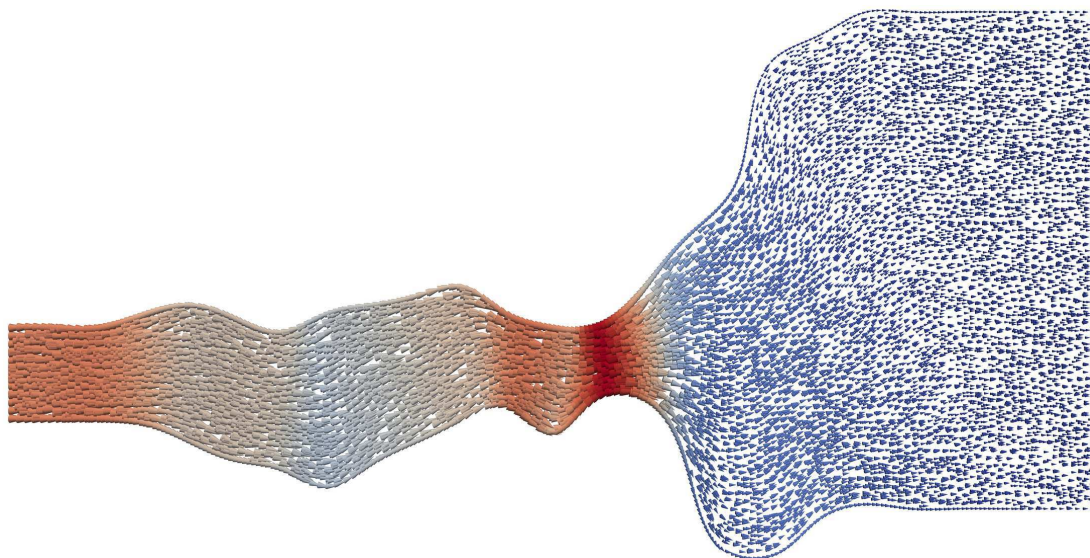
calcul de la densité de courant finale est présentée sur la figure 1.12.



**FIGURE 1.10** – *Ligne support  $C_{opt}$  découverte par l'algorithme de recherche de sections.*



**FIGURE 1.11** – *Détail des diverses intersections sélectionnées. Les valeurs de directions et de surfaces servent à déterminer la direction et la norme de champ de vecteurs en tous points.*



**FIGURE 1.12** – Coupe de la densité de courant finale construite par l'algorithme d'optimisation.

La méthode de calcul des sections remplace avantageusement la méthode des isopotentiellles. Basée sur le calcul des sections, cette méthode assure une répartition de la densité de courant uniforme par section droite d'inducteur. Comparée à la figure 1.7, la figure 1.12 ne présente pas de « diffusion circulaire » de la densité de courant : le courant total est constant par section droite. Ce cas est plus proche du modèle homogénéisé d'un inducteur multi-filamentaire dont la section est changeante.

## 1.5 Conclusion sur les méthodes de construction de la densité source

Quatre méthodes de construction du support  $N$  de la densité de courant source ont été présentée dans ce chapitre. La méthode la plus courante consiste à approximer l'inducteur en un ensemble de formes canoniques pour lesquelles le champ analytique est connu (section 1.1). Cette méthode présente l'avantage d'être très rapide mais l'approximation de l'inducteur réel n'est pas possible dans tous les cas. Si la décomposition n'est pas possible, il faut alors utiliser une méthode plus générale telle qu'une résolution électrocinétique, la méthode des isopotentiellles ou le calcul des intersections. La méthode électrocinétique a l'avantage d'être robuste,

mais représente mal les inducteurs bobinés si ceux-ci présentent un fort rayon de courbure. Une variante, la méthode des isopotentielle, consiste à garder la direction du champ de vecteur et à en corriger la norme localement par la surface des isopotentielle passant par le point considéré. Cependant, nous avons observé que ces isopotentielle peuvent être très déformées si l'angle d'ouverture de l'inducteur est grand. La méthode donnant les meilleurs résultats est basée sur une approche géométrique. Un ensemble de sections optimales est déterminé tout le long de cet inducteur, une densité source est par la suite construit par interpolation à l'aide des directions, des aires et des tangentes au bord des sections. Le surcoût de calcul entraîné par cette dernière méthode est non rédhibitoire si les algorithmes adéquats sont utilisés.

À l'exception de la méthode électrocinétique, le champ résultant des algorithmes de construction n'est pas à divergence nulle et n'est donc pas directement utilisable dans les formulations électromagnétiques. Le chapitre suivant présente diverses méthodes permettant de corriger les champs ainsi construits pour en annuler la divergence.



# Chapitre 2

## Annulation de la divergence de la densité de courant source

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Méthode d'arbre . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>2.2</b>	<b>À l'aide d'un potentiel vecteur . . . . .</b>	<b>99</b>
2.2.1	Méthode utilisée . . . . .	99
2.2.2	Application au cas de la bobine étroite . . . . .	100
2.2.3	Remarques . . . . .	102
<b>2.3</b>	<b>Moindres carrés sous contraintes . . . . .</b>	<b>102</b>
2.3.1	Principe de la méthode . . . . .	102
2.3.2	Application aux changements de section . . . . .	106
<b>2.4</b>	<b>Remarques générales . . . . .</b>	<b>108</b>

---

Les domaines à courant imposé étant considérés comme non conducteurs, les formulations utilisées sont celles de la magnétostatique en potentiel vecteur magnétique (2.1a) ou en potentiel scalaire magnétique (2.1b) :

$$\text{rot } \nu \text{rot } A = J_s, \quad (2.1a)$$

$$\text{div } \mu \text{grad } \Omega = \text{div } \mu H_s, \quad \text{rot } H_s = J_s. \quad (2.1b)$$

Dans les deux cas, le terme source  $J_s$  est au second membre de l'opérateur rotationnel et doit donc appartenir à l'image de celui-ci pour que l'équation ait une solution. Cependant même si la densité de courant source est connue et initialement à divergence nulle, le champ discret peut ne pas être à divergence nulle pour les raisons suivantes :

- les surfaces de l'inducteur, hors zones d'injection de courant, portent la condition aux limites  $J_s \cdot n = 0$ . Dans le domaine discret, cette condition aux limites se traduit par des DdL nuls pour les faces latérales des inducteurs. Cependant, les erreurs géométriques dues à la discrétisation peuvent entraîner une mise à zéro du flux pour les faces latérales, ce qui peut représenter une approximation par rapport au cas réel ;
- les DdL associés aux faces sont calculés à partir d'une quadrature numérique. La densité de courant source initial peut présenter une variation non polynomiale ou d'ordre élevé sur la surface de la face considérée, la quadrature ne permet donc généralement pas de calculer la valeur exacte du DdL.

Ces approximations étant quelconques, il n'y a pas de raison pour que la divergence globale de la densité de courant discrète soit nulle.

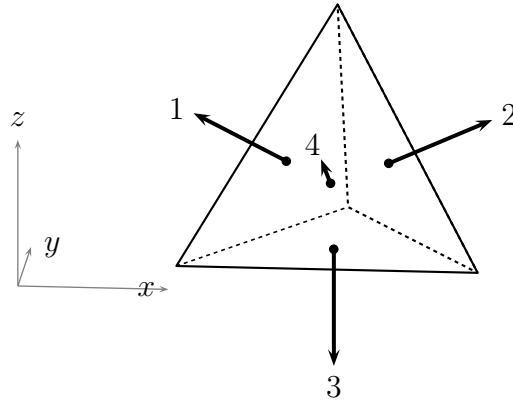
Outre ces raisons, il se peut que le courant associé à des inducteurs homogénéisés ne soit pas, par définition, à divergence nulle. C'est en particulier le cas pour les champs issus de la méthode des isopotentiels ou du calcul des sections lorsqu'une variation de section est présente. Il faut donc ajouter une procédure d'annulation de la divergence dans tous les cas, pouvant fortement modifier la densité de courant source. Ce chapitre présente trois techniques d'annulation de la divergence testées dans le cadre de la modélisation des alternateurs de forte puissance : la méthode d'arbre, une méthode utilisant un potentiel vecteur et la méthode des moindres carrés sous contraintes.

## 2.1 Méthode d'arbre

L'annulation globale de la divergence implique que la divergence soit nulle sur chaque élément. Ainsi pour un élément  $\mathcal{K}$  cette condition se traduit par :

$$\int_{\partial\mathcal{K}} J \cdot n = 0, \quad (2.2)$$

où  $n$  est la normale sortante à l'élément (figure 2.1).



**FIGURE 2.1** – Exemple de découpe d'éléments pour un tétraèdre.

Par définition, le DdL  $d_i^f$  associé à la fonction  $u$  et à la face  $\mathcal{F}_i$  est :

$$d_i^f = \int_{\mathcal{F}_i} u \cdot n. \quad (2.3)$$

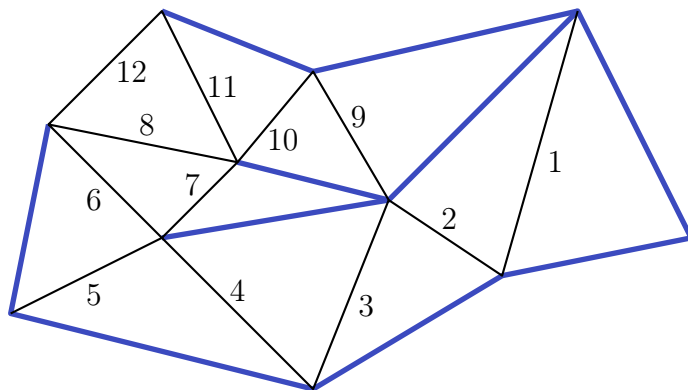
La condition discrète d'annulation de la divergence se traduit ainsi sur chaque élément (voir figure 2.1) :

$$\sum_{i=1}^{n_{faces}} d_i^f = 0. \quad (2.4)$$

Cette méthode est basée sur le principe que  $(n_{faces} - 1)$  DdL sont connus pour un élément, ainsi le dernier DdL est déduit par l'opposé de la somme des  $(n_{faces} - 1)$  autres (ALBANESE et RUBINACCI 1990 ; LE MENACH 1999). Un arbre couvrant maximal est déterminé : un nombre maximal de faces, ne faisant pas de boucle, est sélectionné. Par défaut les faces externes sont sélectionnées (leur flux est connu, non nul sur les surfaces d'injection et nul sur les autres faces). Par parcours inverse



du co-arbre, les éléments ayant un seul DdL inconnu sont déterminés, permettant par la suite de traiter ceux ayant deux DdL inconnus et ainsi de suite. Un exemple d'arbre et d'ordre de calcul est présenté sur la figure 2.2.



**FIGURE 2.2** – Exemple équivalent d'un arbre de facettes pour un maillage 2D triangulaire. Le DdL de la face 1 peut être déduit des DdL du bord du domaine, puis par calculs successifs les DdL des faces 2, 3, 4, 5 et 6 sont également déterminés. La même méthode est appliquée aux faces 7, 9, 10 et 11 permettant ainsi de déduire 8 puis finalement 12.

Cet algorithme, applicable à des champs dont la divergence est proche de zéro, est très efficace (exécution rapide et faible correction apportée au champ). Cependant de part sa structure, les erreurs d'approximations sont propagées de proche en proche et peuvent aboutir à une forte modification de la densité source si la divergence initiale n'est pas proche de zéro.

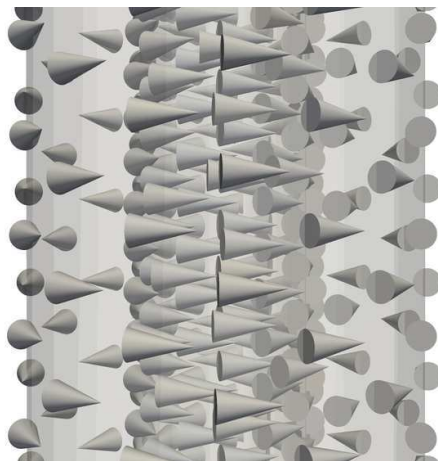
**Exemples numériques :** Le cas test d'une bobine de faible rayon et de grande hauteur permet d'illustrer les problèmes liés à l'arbre de facettes. Le faible rayon permet, à maillage donné, de maximiser les erreurs de facétisations. De plus la variation de la densité de courant analytique, pour une face donnée, est plus importante, réduisant de fait la qualité de la quadrature. Une illustration de la géométrie est présentée sur la figure 2.3. La figure 2.4 est une vue partielle du champ source au sein de la bobine. La figure 2.5 présente cette même densité source après application de la méthode d'arbre : pour ce cas défavorable, les valeurs du champ sont largement modifiées. On observe une propagation des erreurs le long de la

« ligne principale » du co-arbre (flèches rouges sur la figure 2.5).

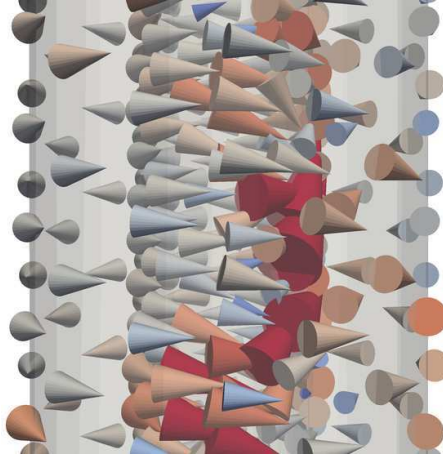
La figure 2.6 présente un second cas pour lequel il n'y a ni approximation géométrique ni erreur sur le calcul de quadratures. Cependant la densité source analytique n'est pas exactement à divergence nulle du fait du changement de section, entraînant ainsi un mauvais comportement de la méthode d'arbre.



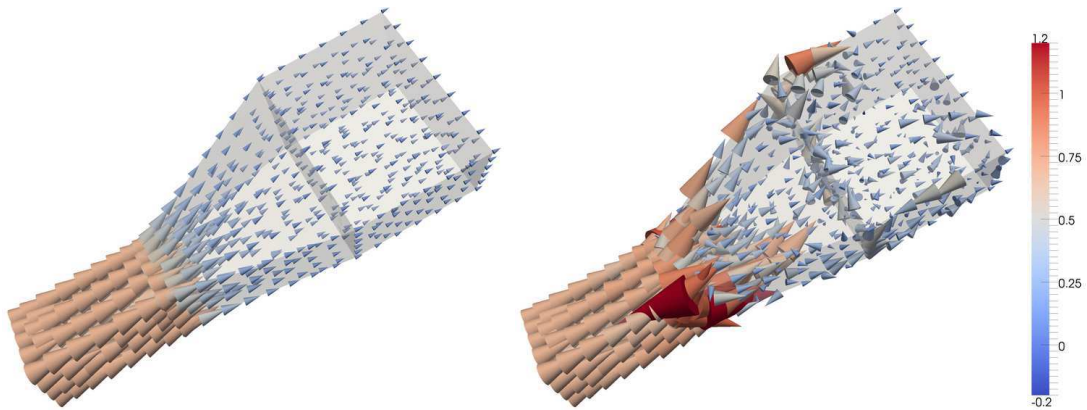
**FIGURE 2.3** – *Premier cas test pour l'annulation de la divergence : bobine circulaire de grand rapport hauteur / rayon. Cette structure concentre les erreurs de discrétisation géométrique et de calcul de quadratures.*



**FIGURE 2.4** – *Premier cas test : visualisation d'une partie du champ analytique imposé sur le cylindre.*



**FIGURE 2.5** – *Premier cas test : résultat après minimisation de la divergence. Sur les faces du co-arbre, la densité est fortement modifiée par accumulation des erreurs.*



**FIGURE 2.6** – *Résultat après annulation de la divergence pour le second cas test : sur les faces du co-arbre, la densité est fortement modifiée par accumulation des erreurs. **Gauche** : Densité de courant source. **Droite** : Champ après correction par la méthode d'arbre.*

**Application aux cages de développantes** La structure des cages de développantes cumule les problématiques d'approximations géométriques (les parties développantes et les coudes) et possède un changement de section au niveau du coude supérieur (zone de la boîte à eau), rendant inutilisable la méthode d'arbre initialement choisie dans `Code_Carmel3D`. Il faut alors développer une méthode alternative permettant de correctement modéliser la structure multi-filamentaire des développantes sans avoir à mailler les brins élémentaires.

## 2.2 Annulation de la divergence à l'aide d'un potentiel vecteur

### 2.2.1 Méthode utilisée

REN (1996) et DYCK et WEBB (2004) ont montré qu'une manière d'obtenir une densité de courant source compatible avec les formulations de l'électromagnétisme était de chercher ce champ dans l'image de l'opérateur rotationnel. Le champ ainsi déterminé est donc intrinsèquement à divergence nulle. Soit  $K$  un potentiel intermédiaire, discrétisé à l'aide d'éléments de Nédélec, définit dans un domaine contractile  $\mathcal{D}_{boi}$  et à composante tangentielle nulle sur  $\partial\mathcal{D}_{boi}$ .  $\mathcal{D}_{boi}$  peut être défini comme une boîte simplement connexe, à frontière connexe, support de  $K$  et entourant entièrement l'inducteur. L'idée est de minimiser la distance entre la densité source analytique  $N_a$  et le rotationnel de  $K$ , le minimum global étant donné par la résolution de la forme faible :

$$\int_{\mathcal{D}_{boi}} \text{rot } T^* \text{rot } K_0 = \int_{\mathcal{D}_K} \text{rot } T^* N_a, \quad (2.5)$$

où  $\text{rot } T^*$  est une fonction test et  $N_a$  est la distribution source donnée par un des algorithmes de construction définis au chapitre 1. Le domaine  $\mathcal{D}_{boi}$  est une boîte dans laquelle est défini le champ source  $K$  et qui, pour des raisons de coût de calcul, peut être choisie comme une sous-partie du domaine d'étude  $\mathcal{D}$ . La solution de cette équation n'est pas unique et il convient de la jauger à l'aide, par exemple, d'une technique d'arbre d'arêtes. On peut aussi se contenter de résoudre le système non jaugé à l'aide d'un solveur itératif. Il suffit ensuite de choisir la densité de courant discrète, à divergence nulle, définie comme :

$$N = \text{rot } K. \quad (2.6)$$

On rappelle que  $N$  est un champ à flux unitaire (divergence annulée) et que la distribution réelle du courant source est  $J_s = n_i I N$ . Ainsi il est aussi possible d'utiliser le champ  $K$  comme source de la formulation magnétique en potentiel  $\Omega$ . Dans ce cas  $H_s = n_i I K$ . Pour la formulation électrique, il est possible d'utiliser  $J_s = n_i I \operatorname{rot} K$ , mais la convergence sera meilleure (REN 1996) si le second membre de la formulation en  $A$  est intégré par partie :

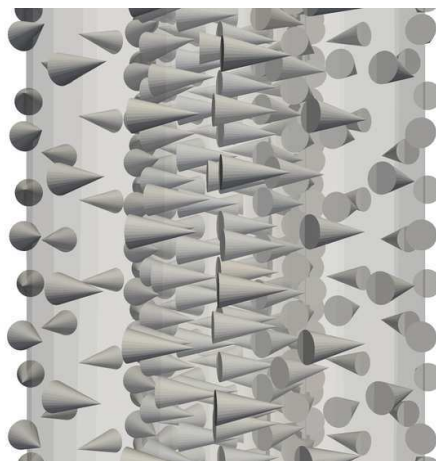
$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{rot} A^* \cdot \operatorname{rot} A &= \int_{\mathcal{D}} A^* \cdot J_a \\
 &= n_i I \int_{\mathcal{D}} A^* \cdot \operatorname{rot} K_a \\
 &= \int_{\mathcal{D}} \operatorname{rot} A^* \cdot K_a - \int_{\partial \mathcal{D}} K_a \times n.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Le terme en  $K \times n$  sera toujours nul car  $K$  est soit supposé nul aux bords du domaine, soit supposé à composante tangentielle nulle (dans le cas où les bords de  $\mathcal{D}_{\text{boi}}$  et de  $\mathcal{D}$  sont en contact). Cette dernière équation est différente de la précédente et suppose la détermination d'un champ  $K_a$  mais supposant la divergence de  $J_a$  nulle.

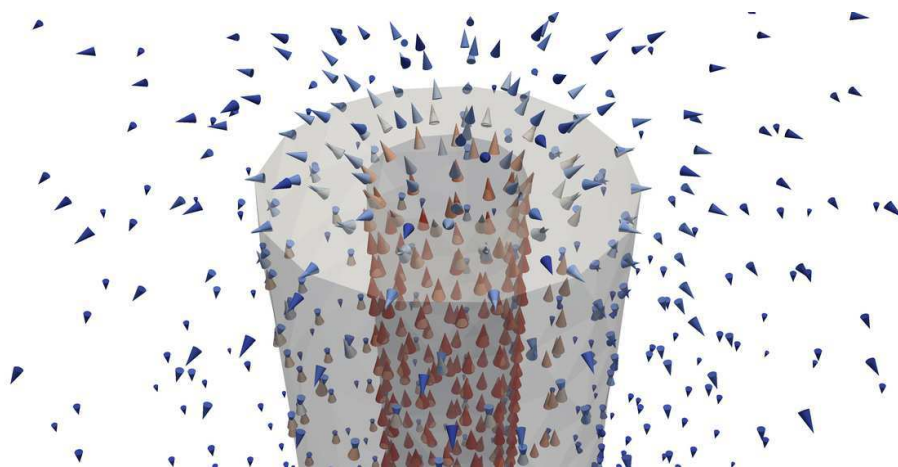
Cette technique a le double avantage, par rapport à la méthode d'arbre, de produire un potentiel source  $H_s$  utilisable dans la formulation électrique mais aussi de minimiser globalement la distance entre le champ souhaité  $N_a$  et son homologue à divergence nulle  $N$ , évitant ainsi les fortes corrections dues à la propagation d'erreurs. Si l'équation analytique de  $N_a$  est à divergence nulle, les meilleurs résultats sont obtenus si l'expression analytique de  $N_a$  est utilisée lors de la quadrature utilisée pour l'assemblage du terme  $\int \operatorname{rot} T^* N_a$ . Sinon, l'équation 2.5 n'est pas forcément compatible, la résolution itérative (même faiblement convergée) permet d'obtenir un champ  $\operatorname{rot} K_a$  proche de  $N_a$  et à divergence nulle.

### 2.2.2 Application au cas de la bobine étroite

Cette méthode est appliquée à une bobine étroite présentée sur la figure 2.3. La figure 2.7 présente le champ  $N = \operatorname{rot} K$ , issu de la résolution du système 2.5, et la figure 2.8 donne un aperçu du potentiel associé ( $K$ ). Le champ ainsi obtenu est très proche de celui initialement défini ( $N_a$ ), et présenté sur la figure 2.4.



**FIGURE 2.7** – Résultat après minimisation de la divergence : la densité source  $N$  est très peu modifiée par rapport à  $N_a$ .



**FIGURE 2.8** – Potentiel intermédiaire utilisé pour l'annulation de la divergence. L'équations utilisée a la même structure que celle utilisée pour la résolution magnétostatique, le champ source peut être assimilé à celui produit par la bobine dans la boîte  $\mathcal{D}_{\text{boi}}$ .

### 2.2.3 Remarques

Chercher une distribution source  $N$  dans l'image du rotationnel suppose que le champ  $N_a$  est initialement à divergence proche de zéro. Le système linéaire issu de l'équation 2.5 a en réalité beaucoup de mal à converger si la divergence de  $N_a$  est trop importante. Cette méthode n'est donc généralement pas applicable aux changements de section ni aux champs issus de la méthode des isopotentiels ou de la recherche des sections. Pour des développantes à section changeante, la méthode s'est avérée peu efficace (mauvaise convergence du solveur itératif), de plus la correction apportée est moins répartie que ce qui peut être prévu.

## 2.3 Méthode des moindres carrés sous contraintes

Une idée simple consiste à chercher le champ à divergence nulle le plus proche en norme de celui donné par les algorithmes de construction. Cette procédure apparemment simple est en réalité peu utilisée car elle fait appel à des algorithmes de minimisation sous contraintes parfois coûteux. Nous détaillons dans ce qui suit les choix permettant d'annuler à moindres coûts la divergence du champ tout en minimisant les modifications apportées.

### 2.3.1 Principe de la méthode

Nous avons vu au paragraphe 2.1 que le critère de divergence nulle conduit à une relation entre les DdL d'un élément. BADICS et CENDES (2007) ont présenté une méthode de moindres carrés visant à minimiser la distance globale entre le champ initial et celui à divergence nulle en ne cherchant la solution que parmi les DdL effectivement libres. Soit un inducteur de domaine  $\mathcal{D}_{ind}$  formé de  $N_e$  éléments et  $N_f$  faces, les champs sources  $N$  et  $N_a$  sont discrétisés à l'aide d'éléments de Raviart-Thomas et possèdent donc *a priori*  $N_f$  DdL. Il existe en outre  $N_e$  relations issues de la condition de nullité de la divergence. Il est donc nécessaire de ne « faire varier » qu'un nombre égal à  $N_f - N_e$  DdL pour déterminer le champ final  $N$ . On cherche cependant à minimiser la distance  $\|N - N_a\|_{\mathcal{L}^2}$  par rapport à l'ensemble des DdL.

La distance  $\|N - N_a\|_{\mathcal{L}^2}$  est effectivement minimale si la dérivée partielle par

rapport à chacun des DdL de face  $d_i^f$  est nulle. Ainsi :

$$\partial_{d_i^f} \|N - N_a\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \partial_{d_i^f} \int_{\mathcal{D}_{ind}} (N - N_a)^\top (N - N_a) = 0, \quad i = 1 \dots N_f. \quad (2.8)$$

Sachant que  $N = \sum_{i=1}^{N_f} w_i^f d_i^f$ , la relation précédente est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\mathcal{D}_{ind}} w_i^f \cdot w_j^f d_j^f - \int_{\mathcal{D}_{ind}} w_i^f \cdot N_a = 0, \quad i = 1 \dots N_f. \quad (2.9)$$

Ce qui revient à résoudre le système :

$$[M][N] = [B], \quad (2.10)$$

de taille  $N_f$  où le vecteur  $[N]$  représente les DdL de la fonctions  $N$ , les termes élémentaires des matrices  $[M]$  et  $[B]$  étant :

$$M_{ij} = \int_{\mathcal{D}_{ind}} w_i^f \cdot w_j^f, \quad (2.11a)$$

$$B_i = \int_{\mathcal{D}_{ind}} w_i^f \cdot N_a. \quad (2.11b)$$

Il faut cependant ajouter à ce système la condition de divergence discrète :

$$[D][N] = 0, \quad (2.12)$$

où  $[D]$  est la matrice d'incidence face-élément (opérateur discret divergence) de taille  $N_e \times N_f$ . Ce système est sous-déterminé : il y a plus d'inconnues que d'équations, il faut donc isoler un système de  $N_e$  équations linéairement indépendantes. BADICS et CENDES (2007) proposent une méthode d'élimination de Gauss-Jordan avec arrêt au premier pivot nul. Cette approche a l'avantage de fournir une forme échelonnée réduite de la matrice facilitant de fait l'extraction du système recherché et son inversion (la sous-matrice du système est triangulaire supérieure). Pour cette application seules les valeurs  $+1$  et  $-1$  sont manipulées, les instabilités intrinsèques de la méthode dues aux approximations numériques machines sont évitées. Cependant, l'inconvénient majeur est que la matrice  $[D]$  est très creuse, très grande dans le cadre d'applications industrielles, et ne peut être manipulée qu'à l'aide de formats de compression. La méthode d'élimination semble peu appropriée dans ce cas.



PIERQUIN et al. (2012) ont montré la faisabilité d'une approche alternative basée sur l'utilisation d'un arbre pour séparer les équations linéairement indépendantes. Cette approche a été adaptée pour la rendre utilisable sur des cas industriels. Les algorithmes de sélection de faces à l'aide d'un arbre couvrant maximal, décrits dans le chapitre 2.1, sont utilisés. Un ensemble de  $N_f - N_e$  faces (parmi lesquelles sont présentes les faces du bord) est sélectionné à l'aide de l'arbre. Il demeure  $N_e$  faces appartenant au co-arbre et destinées à être déduites à partir des faces de l'arbre. Une telle sélection d'indice permet de séparer la matrice  $[D]$  en quatre groupes :

$$[D] = \begin{bmatrix} D & D_r & D_{\Gamma_{ent/sor}} & D_{\Gamma_{lat}} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

où les matrices sont définies ainsi :

- $[D_c]$  est une matrice carrée de dimension  $N_e \times N_e$  issue du co-arbre ;
- $D_r$  est la matrice réduite issue de l'arbre ne comprenant pas de face du bord, de taille *a priori* inconnue ;
- $[D_{\Gamma_{ent/sor}}]$  est la partie de la matrice associée aux faces d'injection, pour lesquelles le flux est connu et non nul ;
- $[D_{\Gamma_{lat}}]$  est le restant de la matrice  $[D]$  associée aux faces latérales pour lesquelles le flux est nul. Il est intéressant de sélectionner cette partie car elle pourra être abandonnée par la suite.

Les différents DdL de la fonction  $N$  sont de la même manière séparés en quatre groupes :

- $[N_c]$  les DdL appartenant au co-arbre, il ne seront pas utilisés pour la minimisation de  $\|N - N_a\|_{\mathcal{L}^2}$  mais déduits à partir des DdL de l'arbre ;
- $[N_r]$  est le vecteur des DdL inconnus avec lesquels on peut procéder à la minimisation ;
- $[N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  sont les DdL des faces d'injection, par conséquent connus ;
- $[N_{\Gamma_{lat}}]$  est un vecteur nul issu de la condition de bord  $N \cdot n|_{\Gamma_{lat}} = 0$ .

L'équation 2.12 se décompose alors en :

$$\begin{bmatrix} C & D_r & D_{\Gamma_{ent/sor}} & D_{\Gamma_{lat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c \\ N_r \\ N_{\Gamma_{ent/sor}} \\ N_{\Gamma_{lat}} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.14)$$

permettant d'exprimer les DdL du co-arbre à l'aide de ceux connus et cherchés par

minimisation :

$$[N_c] = -[D_c]^{-1}[D_r][N_r] - [D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}] - \underbrace{[D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{lat}}][N_{\Gamma_{lat}}]}_{=0}. \quad (2.15)$$

Afin de prendre en compte la contrainte de divergence nulle dans la minimisation aux moindres carrés, la matrice  $[M]$  est décomposée en  $[M_c \ M_r \ M_{\Gamma_{ent/sor}} \ M_{\Gamma_{lat}}]$ . En remplaçant l'expression de  $N_c$  (équation 2.15) dans l'équation 2.10, le système linéaire suivant est obtenu :

$$([M_r] - [M_c][D_c]^{-1}[D_r]) [N_r] = [B] + ([M_c][D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{ent/sor}}] - [M_{\Gamma_{ent/sor}}]) [N_{\Gamma_{ent/sor}}]. \quad (2.16)$$

Tout l'enjeu est de laisser un maximum de matrices sous formes compressées (CSR<sup>1</sup> dans notre cas). Une opération délicate reste à traiter : l'inversion de la matrice  $[D_c]$ . Cette matrice est issue de la sélection de  $N_e$  colonnes de la matrice  $[D]$  et, de part l'utilisation de la technique d'arbre, ne peut comporter qu'une, deux ou trois valeurs non nulles (+1 ou -1) par ligne. Son inversion est réalisée en tirant parti de cette propriété (PIERQUIN et al. 2012) : par itérations successives sur les lignes, on traite celle n'ayant plus qu'une valeur inconnue. Cette méthode permet de déterminer de manière efficace la matrice  $[D_c]^{-1}$ . Pour le reste des calculs, la manipulation des matrices est réalisée comme décrite par SAAD (2003). Il faut bien veiller à ne réaliser qu'un nombre minimal d'opérations comme décrit dans l'algorithme 2.1

Il est à noter que le second membre est de taille  $N_f$ , et que la matrice  $[M_r] - [M_c][D_c]^{-1}[D_r]$  est rectangulaire. Il faut par conséquent utiliser une méthode numérique adéquate pour résoudre ce système. L'utilisation de méthodes directes classiques (par exemple une décomposition QR) serait trop coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire. Nous avons choisi d'utiliser une méthode itérative permettant de conserver la matrice  $[M_r] - [M_c][D_c]^{-1}[D_r]$  sous sa forme compressée, tout en évitant de stocker des matrices supplémentaires. Le solveur choisi est LSMR décrit dans FONG et M. SAUNDERS (2011), une version améliorée de l'algorithme LSQR (PAIGE et M. A. SAUNDERS 1982). Ce dernier algorithme est ce que pourrait être l'algorithme du gradient conjugué appliqué aux matrices creuses et

---

1. Format CSR (pour *Computer Sparse Row*) ou morse : la matrice est stockée sous la forme de trois tableaux ; un tableau pour les valeurs non nulles, un pour le numéro de colonne pour chaque valeur et un pour la position du premier indice (dans le tableau des numéros de colonnes) de chaque ligne.

---

**ALGORITHME 2.1** – *Algorithme de correction des normes, exemple pour des tétraèdres.*


---

**Données** : Informations de maillage de l'inducteur et de  $\Gamma_{ent}$ ,  $\Gamma_{sor}$ ,  $\Gamma_{lat}$

**Résultat** : Vecteur  $[N]$

- 1 Détermination de l'arbre de faces ;
  - 2 Calcul des matrices  $[D_c]$ ,  $[D_r]$ ,  $[D_{\Gamma_{ent/sor}}]$ ,  $[D_{\Gamma_{lat}}]$  ;
  - 3 Inversion de  $[D_c]$  ;
  - 4 Suppression de  $[D_c]$  ;
  - 5 Calcul de décomposition de  $[M]$  en  $[M_c]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_{\Gamma_{ent/sor}}]$ ,  $[M_{\Gamma_{lat}}]$  ;
  - 6 Suppression de  $[M]$  ;
  - 7 Calcul de  $[D_c]^{-1}[D_r]$  puis de  $[M_c][D_c]^{-1}[D_r]$  ;
  - 8 Calcul de la somme  $[M_r] - [M_c][D_c]^{-1}[D_r]$  ;
  - 9 Suppression de  $[M_c][D_c]^{-1}[D_r]$  et de  $[M_r]$  ;
  - 10 Calcul du vecteur  $[N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 11 Calcul du produit matrice/vecteur  $[M_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$ , libération de  $[M_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 12 Produit matrice/vecteur  $[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  puis  $[D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  et  $[M_c][D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 13 Suppression de  $[M_c]$  ;
  - 14 Calcul de  $[B]$  puis somme des trois vecteurs du second membre ;
  - 15 Résolution du système linéaire ;
  - 16 Insertion des termes de  $[N_r]$  et de  $[N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  dans  $[N]$  ;
  - 17 Calcul par produits matrices/vecteurs de  $[D_r][N_r]$  puis de  $[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 18 Suppression de  $[D_r]$  et de  $[D_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 19 Calcul par produits matrices/vecteurs de  $-[D_c]^{-1}[D_r][N_r]$  puis de  $-[D_c]^{-1}[D_{\Gamma_{ent/sor}}][N_{\Gamma_{ent/sor}}]$  ;
  - 20 Suppression de  $[D_c]^{-1}$  et assemblage final de  $[N_c]$  dans  $[N]$  ;
- 

rectangulaires. LSQR est basé sur une bi-diagonalisation particulière issue de la méthode de Lanczos appliquée au système  $A^\top A = A^\top B$ . LSMR présente une meilleure convergence que LSQR, réduisant de fait le temps de calcul à norme du résidu donné.

### 2.3.2 Application aux changements de section

Les méthodes d'arbre ou de calcul d'un potentiel pour annuler la divergence ne sont pas bien adaptées aux champs initialement construits à partir d'inducteurs à section changeante. Le premier exemple est celui issu du changement de section quelconque utilisé au paragraphe 2.1. La figure 2.9 présente la densité de courant source et le champ après passage de l'arbre de facette. On présente sur la figure 2.10 le résultat tel qu'obtenu avec l'arbre ainsi que celui obtenu après minimisation.

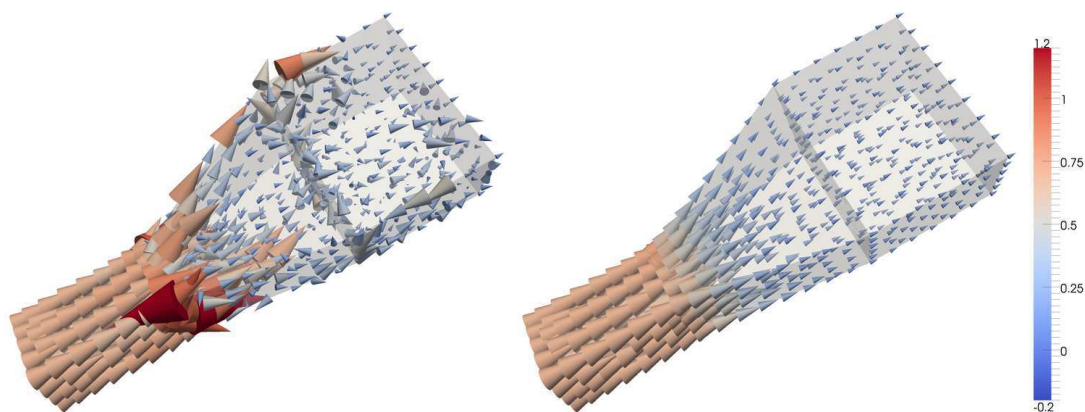


FIGURE 2.9 – Résultat après annulation de la divergence. **Droite** : Méthode d'arbre. **Gauche** : Méthode de minimisation.

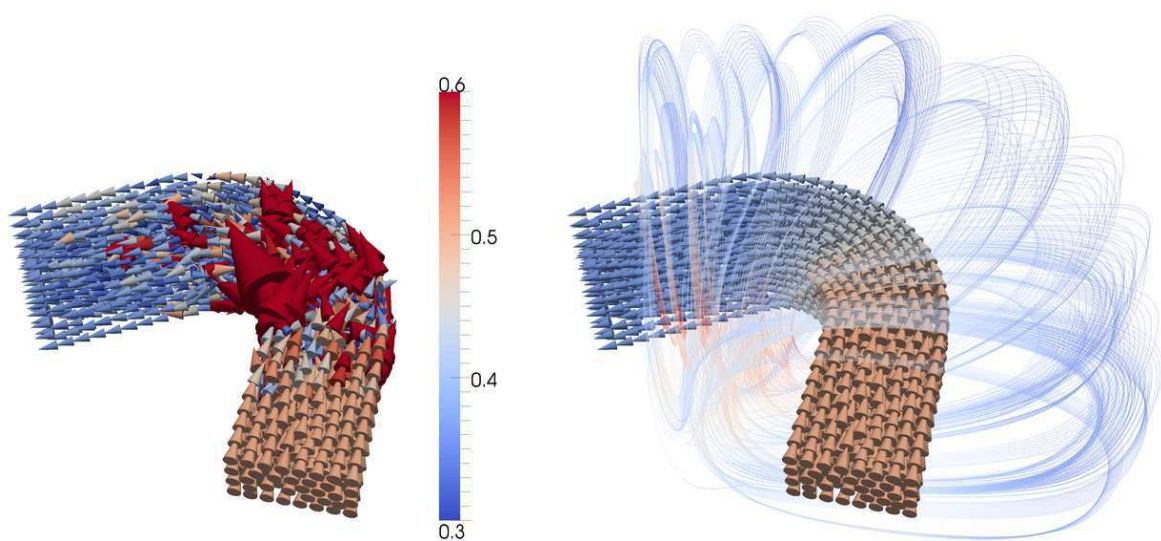


FIGURE 2.10 – Application aux coudes supérieurs de développantes. **Gauche** : Méthode d'arbre (Norme maximale tronquée). **Droite** : Méthode de minimisation (plus lignes de champs du calcul magnétique ayant parfaitement convergé).

Un second exemple est basé sur le coude à changement de section (voir le chapitre 1.1). Cet exemple est particulièrement important puisque c'est avec ce type de pièce qu'est modélisée la « boîte à eau<sup>2</sup> » de la développante. Les résultats comparés de la méthode d'arbre et de la méthode de minimisation sont présentés sur la figure 2.10.

## 2.4 Remarques générales sur les méthodes utilisées

Tout comme pour les méthodes de construction de densité source, le choix d'une méthode d'annulation de la divergence est fortement dépendant du problème à traiter. Il convient d'utiliser une méthode adéquate car, pour de grands problèmes industriels, le surcoût en mémoire et en temps de calcul peut ne plus être négligeable.

La méthode d'arbre, bien que mise en défaut à plusieurs reprises dans ce chapitre, reste cependant un très bon moyen d'annuler la divergence dans les inducteurs canoniques. Dès lors que la divergence de la densité de courant source analytique est proche de zéro, les corrections à apporter ne sont pas trop importantes et la méthode d'arbre annule la divergence avec un coût de calcul très faible. Il peut cependant arriver que les erreurs de discrétisation et de calcul de quadrature engendrent une propagation de la correction le long de l'arbre. Une méthode de projection  $\mathcal{L}^2$  orthogonale peut être envisagée : basée sur le potentiel source associé au courant, elle tend à projeter au travers du potentiel le champ  $N_a$  sur la base des fonctions de face. L'écriture sous la forme d'une formulation faible en  $\text{rot} \cdot \text{rot}$  permet de chercher cette solution dans un espace de fonctions à divergence nulle. Dans les cas quelconques, et en particulier si le champ initial est quelconque, une méthode plus complexe doit être utilisée. Une méthode de minimisation sous contrainte forte d'annulation de la divergence est utilisable. Le coût en calcul est néanmoins supérieur aux deux autres méthodes.

---

2. La boîte à eau est l'ensemble des pièces composant la partie supérieure de la développante, servant à la connection des inducteurs avec les circuits de refroidissement des barres.

# Chapitre 3

## Résultats numériques

### Sommaire

---

3.1	Tube courbé à changement de section . . . . .	110
3.2	Application à un inducteur complet de tête de bobine	112

---

Nous présentons dans ce chapitre quelques applications numériques combinées des méthodes de construction de champ et d'annulation de la divergence pour des inducteurs de structure complexe.

### 3.1 Tube courbé à changement de section

Il s'agit de déterminer le champ créé par un inducteur recourbé à changement de section. Cet exemple est complet puisqu'il faut déterminer un champ source dans une géométrie complexe pour laquelle il n'existe pas de formule analytique. En outre, la présence du changement de section conduit à la construction d'un champ initial à divergence non nulle. La résolution du problème magnétique exige la détermination d'un champ à divergence nulle, ce qui ne peut être fait que par la méthode de minimisation. D'autres aspects rendent cet exemple particulièrement délicat : la forme arrondie tend à accumuler les erreurs de discrétisation géométrique tandis que la forme courbée complique la méthode de construction des sections car l'intersection entre cette structure et un plan n'est pas forcément simplement connexe.

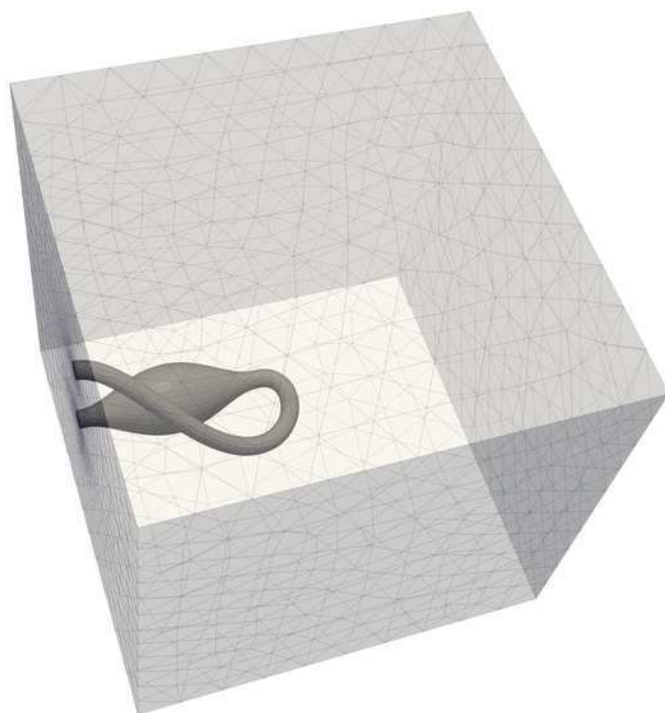
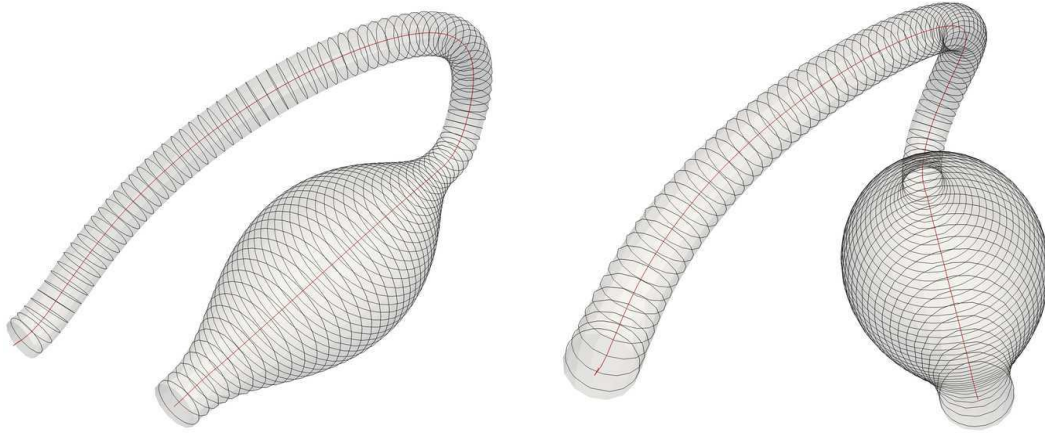
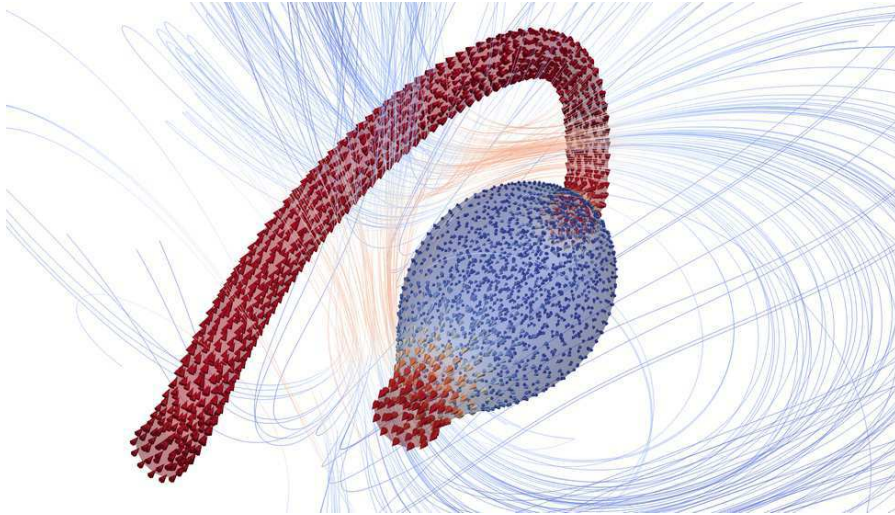


FIGURE 3.1 – Géométrie et boîte d'air correspondante.

La figure 3.1 présente la géométrie de l'inducteur entouré de la boîte d'air utilisée pour la résolution du problème magnétique. La figure 3.2 donne le détail de la “courbe support” utilisée pour la détermination des sections. Une fois le champ source construit, un problème de magnétostatique utilisant la formulation en potentiel vecteur est résolu. La perméabilité est supposée uniforme sur tout le domaine. Les lignes de champ et le courant source imposé dans le problème magnétique sont présentés sur la figure 3.3.



**FIGURE 3.2** – Deux vues de l'inducteur et des sections servant à construire le champ source. La ligne support  $C_{opt}$  est représentée au centre (rouge).

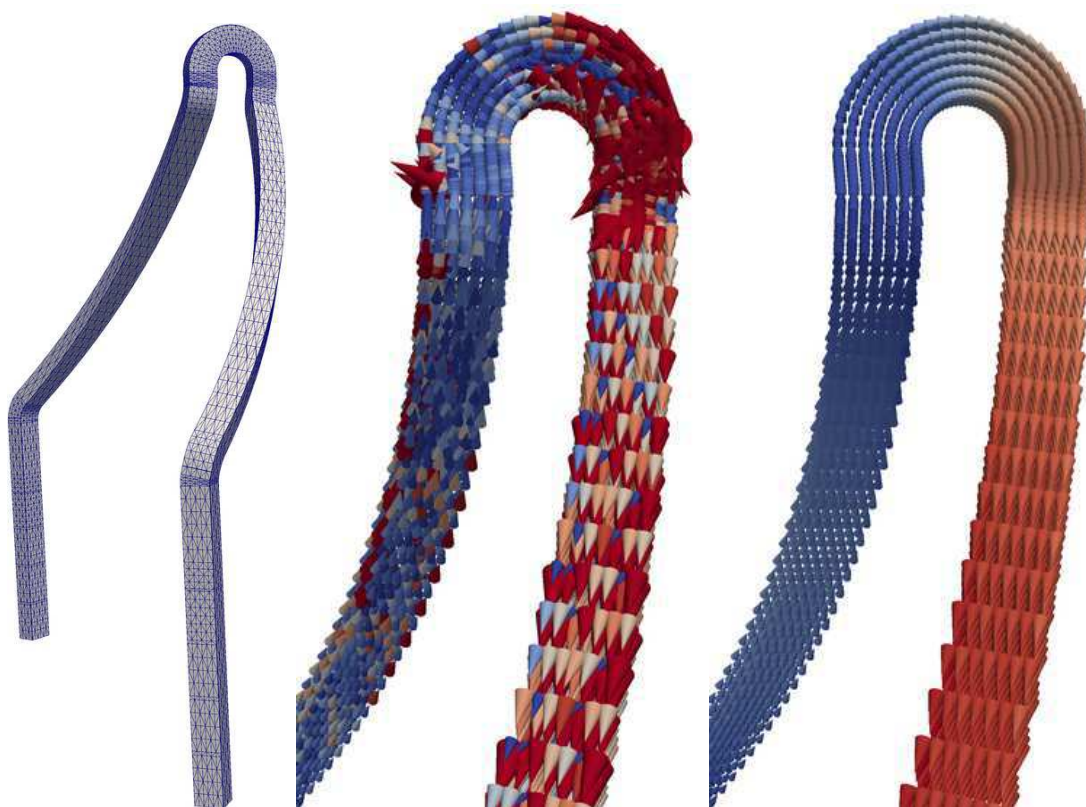


**FIGURE 3.3** – Vue du courant imposé dans l'inducteur et des lignes de champs obtenues après résolution magnétique.



## 3.2 Application à un inducteur complet de tête de bobine

Un inducteur de développante est formé de deux branches, chacune constituée d'une partie droite, de deux coudes, d'une section de développante de cône et d'une partie droite. Ces deux branches, de sections différentes, sont reliées par le coude supérieur tel que décrit au paragraphe 1.1. La figure 3.4 donne un aperçu de la géométrie globale et des résultats pouvant être obtenus par la méthode d'arbre et de minimisation. On constate que la méthode de minimisation semble la plus adaptée à ce problème.



**FIGURE 3.4** – *Gauche* : géométrie d'une développante. *Milieu* : résultat produit pour l'annulation de la divergence à l'aide d'une méthode d'arbre. *Droite* : résultat obtenu avec la méthode de minimisation.

Les modèles de développantes présentés dans la littérature font parfois appel à des résolutions électrocinétiques. La figure 1.4 présentée au chapitre 1 est en réalité un agrandissement du champ source obtenu, au sein de cette géométrie, par

### *3.2. APPLICATION À UN INDUCTEUR COMPLET DE TÊTE DE BOBINE*<sup>113</sup>

résolution électrocinétique.

Une application avec comparaison sur les contraintes mécaniques est présentée en annexe A.



# Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la présentation des différentes techniques utilisées pour la prise en compte des inducteurs bobinés. `Code_Carmel3D` utilise traditionnellement une méthode basée sur la définition d'inducteurs droits et circulaires, associée à une technique d'arbre pour l'annulation de la divergence. La modélisation des cages de développantes nécessite la définition de nouveaux types d'inducteurs permettant de représenter la structure particulière de ceux utilisés dans les cages de développante. De plus, les méthodes d'annulation de la divergence ont dû être adaptées, la méthode d'arbre s'étant avérée peu adaptée aux nouveaux types d'inducteurs modélisés.

La construction du champ en lui-même a été abordée en deux étapes. De nouveaux inducteurs canoniques ont été ajoutés permettant de se rapprocher de la structure réelle. Nous avons ensuite testé les méthodes de la littérature existantes (résolution électrocinétique et méthode des isopotentiellles). Cependant, ces méthodes n'ayant pas donné entière satisfaction, une méthode purement géométrique basée sur la construction des sections a été développée.

La méthode d'arbre permettant l'annulation de la divergence a dû être adaptée. Basée sur les travaux de PIERQUIN et al. (2012), cette méthode permet de trouver, au sens des moindres carrés et sous contrainte forte de nullité de la divergence, le champ le plus proche de celui donné par les algorithmes de construction cités précédemment. Cette méthode dite « des moindres carrés » permet la prise en compte d'inducteurs quelconques.



## TROISIÈME PARTIE

### Calcul de forces en électromagnétisme



# Introduction

Dans les parties frontales des alternateurs, la présence de champ magnétique et de courant engendre l'apparition de forces électromagnétiques responsables de contraintes et de déformations de la structure. Les problèmes liés à ces forces sur les machines de grande puissance ne peuvent être étudiés que par des modèles couplant magnétisme et mécanique. Ainsi la précision du calcul des forces magnétiques influera directement sur la précision avec laquelle sont déterminées les grandeurs mécaniques. Cependant la question du calcul des forces macroscopiques en électromagnétisme a suscité débat (KABASHIMA et al. 1988; MEDEIROS et al. 1998; BOSSAVIT 2011). L'objectif du calcul est de déterminer les déformations locales de la structure, ce qui requiert la détermination des forces locales.

Les forces en électromagnétisme sont dues à des phénomènes d'interaction entre les charges et la structure cristalline du matériau considéré. Les capacités même de la modélisation nous permettent, au mieux, de considérer une partie aussi petite qu'une cellule du pavage. Nous devons donc nous contenter de lois dites « moyennées » qui rendent compte de l'interaction globale de tous les phénomènes microscopiques présents dans la cellule. Le terme « force locale » fait ici référence à une force moyenne sur une cellule, et « force globale » fait référence à une force pour une pièce entière.

L'étude des forces dans les conducteurs de machines demande, en général, de déterminer les forces locales au sein de matériaux de perméabilité relative unitaire. Cependant, la présence du circuit magnétique ainsi que d'une structure de serrage suppose que la méthode finale doit pouvoir prendre en considération des pièces de perméabilité multiple.

En ce qui concerne les forces locales, les méthodes de calcul sont soit basées sur le modèle des forces de Lorentz avec utilisation de courants et charges au niveau macroscopique, soit basées sur des méthodes dites énergétiques. Il sera porté une



grande importance à la distinction entre ce qui peut être calculé en fonction des modèles considérés et les efforts réels. La détermination des forces locales pour les différents calculs peut donner des résultats différents, voire non interprétables.

Nous n'avons pas la prétention de présenter un modèle innovant, l'objectif de cette partie est de présenter ces méthodes afin de mieux comprendre leurs capacités, leurs liens et leurs limites. Leur efficacité dépendra du problème étudié. Une brève extension aux aimants est présentée. Les résultats des tests comparatifs, appliqués à des cas analytiques, sont donnés en fin de partie.

# Chapitre 1

## Origine et calcul des énergies

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>1.2</b>	<b>Principes énergétiques . . . . .</b>	<b>122</b>
1.2.1	Fonctions convexes en dualité . . . . .	123
1.2.2	Lien entre énergie et loi de comportement . . . . .	123
1.2.3	Bilan de puissance, expression des forces . . . . .	125
1.2.4	Expression énergétique de la force, lien avec d'autres méthodes . . . . .	127

---

## 1.1 Introduction

Les seules forces considérées ayant un sens physique sont les forces d'origines électrique (Coulomb) et magnétique (action élémentaire de Laplace). Elles s'appliquent à une particule chargée, assez petite pour ne pas perturber le champ environnant, et peuvent s'écrire :

$$q(E + v \times B), \quad (1.1)$$

où  $q$  est la charge élémentaire,  $E$  et  $B$  les champs électrique et magnétique et  $v$  la vitesse (ROBINSON 1973).

Dans le cadre de la modélisation numérique des machines, il est impossible de produire un modèle permettant de suivre chaque particule chargée indépendamment. On s'intéresse généralement aux valeurs moyennées sur un volume : la charge et le courant sont intégrés sur un volume  $d\tau$  entourant  $x$  suffisamment grand pour pouvoir représenter les particules comme des densités, mais pour lequel les champs macroscopiques ont une variation faible. Cette opération, en apparence simple, est en réalité délicate car elle fait intervenir le comportement des matériaux soumis à des champs électriques ou magnétiques macroscopiques. Les méthodes locales de calcul de forces ne peuvent donc être que de deux types : basée sur un modèle microscopique simplifié (force de Laplace, modèles des courants ampériens ou charges coulombiennes), ou utilisant la variation locale d'énergie magnétique (par exemple la méthode des travaux virtuels).

Ces méthodes sont nombreuses (J.-L COULOMB 1983 ; J.-L. COULOMB et MEUNIER 1984 ; ARONSON et BRAUER 1989 ; WIGNALL et al. 1988 ; HAMDI et al. 1993 ; REN 1994 ; VANDEVELDE et MELKEBEEK 2001), et leur présentation est abondante dans la littérature. Il est couramment admis que, pour les milieux de perméabilité homogène, la méthode des forces de Laplace est efficace. Dans le cas contraire, la méthode des travaux virtuels est efficace. Nous ne considérerons dans ce qui suit que ces deux méthodes.

## 1.2 Principes énergétiques

Le but de cette partie est de montrer comment est définie l'énergie pour le système considéré. Ceci permet de mieux comprendre comment effectuer le calcul des forces de Laplace, et celui des travaux virtuels pour le problème discret.

### 1.2.1 Fonctions convexes en dualité

Les fonctions convexes en dualité interviennent souvent dans la représentation énergétique des systèmes et constituent pour la suite la définition de l'énergie et de la coénergie. L'objectif est ici de comprendre leur fonctionnement et de montrer quelques propriétés générales.

On considère  $(x, y) \in X$  deux points d'un espace de Hilbert ainsi que deux fonctions semi-continues inférieurement. Ces deux fonctions sont en dualité si et seulement si :

$$\Phi(x) = \sup\{(x, y') - \Psi(y'), y' \in \text{dom}(\Psi)\}, \quad (1.2)$$

$$\Psi(y) = \sup\{(x', y) - \Phi(x'), x' \in \text{dom}(\Phi)\}. \quad (1.3)$$

Trois propriétés importantes<sup>1</sup> sont déduites de cette définition (BOSSAVIT 2003). Avec les mêmes notations, on a équivalence entre :

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Psi(y) &= (x, y), \\ x &\in \partial\Psi(y), \\ y &\in \partial\Phi(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Lien entre énergie et loi de comportement

Les relations précédentes sont valables pour tout couple de fonctions en dualité. L'intérêt vient de la relation possible avec la loi de comportement du matériau considéré. Prenons une fonction  $\gamma$ , partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  pour nos besoins. Son graphe est supposé maximal monotone, et sera même connexe dans notre cas. On définit alors les fonctions  $(\Phi, \Psi)$  comme :

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} \int_0^x \gamma(s) ds, \quad (1.5)$$

$$\Psi(y) = \int_{\Omega} \int_0^y \gamma^{-1}(s) ds, \quad (1.6)$$

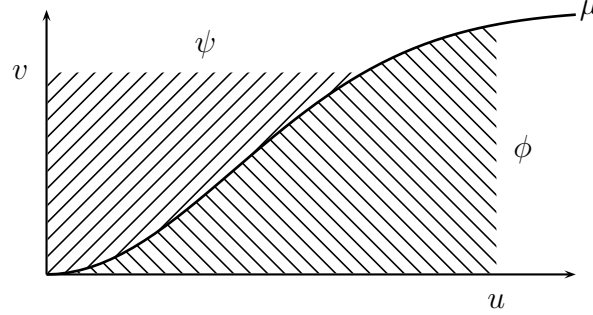
---

1. D'un point de vue physique, ces propriétés liées à la définition et l'unicité de la loi de comportement.

avec  $x \in \text{dom}\gamma$  et  $y \in \text{cod}\gamma$ . Ainsi  $\text{dom}\Phi = \text{dom}\gamma$  et  $\text{dom}\Psi = \text{cod}\gamma$  et sont en dualité. On remarque aussi :

$$\forall \{x, y\} \in \text{dom}\gamma \times \text{cod}\gamma \quad \Phi(x) + \Psi(y) \geq (x, y). \quad (1.7)$$

Ces deux fonctions peuvent être représentées par le schéma 1.1.



**FIGURE 1.1** – Les valeurs de  $(\Phi, \Psi)$  sont les aires hachurées.

L'égalité dans l'équation 1.7 est obtenue si et seulement si la loi de comportement est vérifiée, c'est-à-dire si  $\{x, y\} \in \gamma$  alors on peut écrire  $y = \gamma(x)$  en supposant que  $\gamma$  est une fonction.

*Application* : On voit maintenant que si on suppose que  $\gamma$  est la fonction croissante de  $\mathbb{R}^+$  donnant  $\mu$  en fonction de la norme du champ, pour le cas continu scalaire on obtient :

$$\Phi(\|B\|) = \int_0^{\|B\|} s\nu(s)ds, \quad (1.8)$$

$$\Psi(\|H\|) = \int_0^{\|H\|} s\mu(s)ds, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \forall \{\|B\|, \|H\|\} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad & \Phi(\|B\|) + \Psi(\|H\|) \geq \|B\|\|H\|, \\ \forall \|H\| \in \mathbb{R}^+ \quad & \Phi(\|B\|) + \Psi(\|H\|) = \|B\|\|H\| \Rightarrow B = \mu(\|H\|)H, \end{aligned}$$

$$\partial_{\|B\|}\Phi = \|H\|, \quad -\partial_u\Phi = F, \quad (1.10)$$

$$\partial_{\|H\|}\Psi = \|B\|, \quad \partial_u\Psi = F. \quad (1.11)$$

On a ajouté ici l'expression des forces à l'aide de la dérivée par rapport au déplacement. Cette expression ne dérive pas directement de l'application des méthodes relatives aux fonctions convexes, mais est supposée être l'application de la méthode des travaux virtuels : le travail infinitésimal de la force correspond à la variation d'énergie magnétique infinitésimale.

Le fait d'établir une loi de comportement pour le matériau considéré et alors équivalent à définir un comportement en énergie. À l'inverse : mesurer la loi en énergie devrait permettre de construire une loi de comportement égale.

### 1.2.3 Bilan de puissance, expression des forces

En utilisant ce qui a été défini au chapitre 2 de la partie I, on va chercher à déterminer une expression d'énergie (les lettres en petites capitales désignant les formes différentielles, les expressions vectorielles sous les intégrales étant les champs de  $\mathbb{R}^3$  associés). Soit  $u$  la transformation de l'espace relative au déplacement considéré. Les équations de Maxwell sont exprimées en description Lagrangienne, seul l'opérateur de Hodge dépend de la transformation  $u$ . Dans la référence BOSSAVIT (2004), les énergies sont définies comme :

$$\Phi(u, B) = \sup\{H' : \int_{\Omega} B \wedge H' - \Psi(u, H')\}, \quad (1.12)$$

$$\Psi(u, H) = \sup\{B' : \int_{\Omega} B' \wedge H - \Phi(u, B')\}. \quad (1.13)$$

En supposant la loi de comportement linéaire, on obtient pour un couple  $(B, H)$  vérifiant la loi de comportement  $\Phi(u, B) + \Psi(u, H) = \int_{\Omega} B \wedge H$  :

$$\Phi(u, B) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu B \wedge \star_u B, \quad (1.14)$$

$$\Psi(u, H) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu H \wedge \star_u H. \quad (1.15)$$

$\Phi$  et  $\Psi$  sont  $F$ -différentiables pour  $(B$  et  $H)$  et les opérateurs linéaires associés sont  $(H, B)$  respectivement :

$$D_B \Phi(u, B) = H, \quad (1.16)$$

$$D_H \Psi(u, H) = B. \quad (1.17)$$

De ces expressions d'énergies, on peut déduire un bilan de puissance. Prenons la dérivée en temps de la fonction scalaire  $d\Phi(u(t), B(t))$ , l'application de la dérivée totale avec l'identification des proxys donne :

$$\begin{aligned} d\Phi(u(t), B(t)) &= \partial_u \Phi \partial_t u + \int_{\Omega} \partial_B \Phi \wedge \partial_t B, \\ &= \partial_u \Phi \partial_t u + \int_{\Omega} H \wedge \partial_t B. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Sachant  $dH = J_\sigma + J_s$  et  $\partial_t B + dE = 0$ , avec les propriétés de la trace du champ électrique  $tE = 0$  sur  $\Sigma^e$ , on montre :

$$- \int_{\Omega} E \wedge J + \int_{\Omega} H \wedge \partial_t B + \int_{\Omega} d(E \wedge H) = \int_{\Omega} H \wedge \partial_t B. \quad (1.19)$$

En combinant les deux équations précédentes on obtient un bilan de puissances instantanées :

$$\begin{aligned} d\Phi(u(t), B(t)) &= - \int_{\Omega} E \wedge J_s - \int_{\Omega} E \wedge (J - J_s) + \partial_u \Phi \partial_t u. \\ &= \quad \quad \quad \textcircled{1} \quad \quad \quad \textcircled{2} \quad \quad \quad \textcircled{3} \end{aligned} \quad (1.20)$$

La variation infinitésimale d'énergie est due à :

- l'énergie apportée  $\textcircled{1}$  ;
- les pertes joules  $\textcircled{2}$  ;
- ce qui est converti en énergie mécanique  $\textcircled{3}$ .

Ce qui précède montre que la part de variation d'énergie dans le système est un terme du type  $-\partial_u \Phi \partial_t u$ . Lorsque la loi de comportement est vérifiée on obtient l'égalité suivante :  $\Phi(u, B) + \Psi(u, H) = \int_{\Omega} B \wedge H$ . Après différentiation par  $t$  il vient, pour tout  $u$  :

$$\begin{aligned} \partial_u \Phi \partial_t u + \int_{\Omega} H \wedge \partial_t B + \partial_u \Psi \partial_t u + \int_{\Omega} B \wedge \partial_t H \\ = \int_{\Omega} H \wedge \partial_t B + \int_{\Omega} B \wedge \partial_t H. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Soit en remplaçant  $\partial_t u$  par  $v$  :

$$v \partial_u \Psi = -v \partial_u \Phi, \quad (1.22)$$

qui n'est autre que la méthode des travaux virtuels : « la force est la dérivée partielle de la coénergie ou l'opposée de la dérivée partielle de l'énergie, les autres grandeurs étant maintenues constantes ».

#### 1.2.4 Expression énergétique de la force, lien avec d'autres méthodes

On cherche maintenant une expression de la force pour le cas statique linéaire, avec  $\Psi(u, H) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu H \wedge \star_u H$ . À l'aide des outils présentés dans BOSSAVIT (1992), l'égalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Psi(u, H) &= \partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu H \wedge \star H & (1.23) \\
 &= \int_{\Omega} \mu \star H \wedge \partial_t H + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mu H \wedge \star H \\
 &= - \int_{\Omega} \mu \star H \wedge L_v H + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mu H \wedge \star H \\
 &= \int_{\Omega} B \wedge (i_v J + di_v H) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mu H \wedge \star H \\
 &= - \int_{\Omega} B \wedge i_v J - \int_{\Omega} dB \wedge i_v H + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mu H \wedge \star H \\
 &= - \int_{\Omega} B \wedge i_v J + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t \mu H \wedge \star H \\
 &\equiv \int_{\Omega} \mathbf{J} \times B - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |H|^2 \nabla \mu. & (1.24)
 \end{aligned}$$

*Conclusion* : On retrouve les formules traditionnellement utilisées pour le calcul des forces locales en électromagnétisme. Ceci prouve que l'application de la méthode des travaux virtuels pour les conducteurs doit donner les mêmes résultats que la méthode des forces de Laplace. Si la perméabilité du milieu n'est pas uniforme seule la méthode des travaux virtuels est utilisable, les forces de Laplace ne donnant pas le terme en  $|H|^2 \nabla \mu$ .





# Chapitre 2

## Méthodes de calcul des forces

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Forces de Laplace . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthode de Urankar . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>2.3</b>	<b>Méthode des travaux virtuels . . . . .</b>	<b>131</b>
2.3.1	Expression intégrale de l'énergie . . . . .	132
2.3.2	Cas des matériaux non linéaires ou magnétostrictifs . . .	135
2.3.3	Application de la méthode des travaux virtuels aux aimants	136

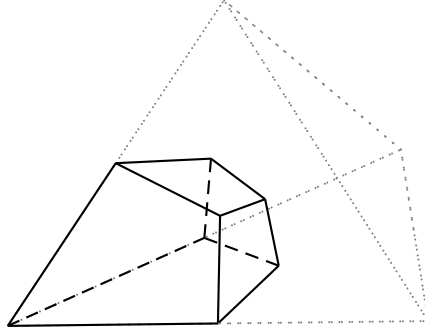
---

## 2.1 Forces de Laplace

L'utilisation des formules précédentes montre que la force de Laplace exprimée avec le formalisme des formes différentielles est l'application (BOSSAVIT 2008) :

$$v \rightarrow i_v B \wedge J, \quad (2.1)$$

où  $v$  est homogène à une vitesse. C'est une 3-forme et est donc destinée à être intégrée sur un volume. Cette expression doit être intégrée sur les volumes duaux  $\tilde{n}$  (BOSSAVIT 2008). Si on considère une construction barycentrique du maillage dual, les volumes sont définis comme dans la figure 2.1. L'intégration de la densité de force sur ces volumes donne des vecteurs (les résultantes) à associer à chacun des nœuds du maillage primal. Nous obtenons par ce biais des forces nodales.



**FIGURE 2.1** – Quart de tétraèdre constituant une partie de la « zone de contrôle » du nœud.

REN (1994) suggère qu'il est préférable d'utiliser les deux formulations de l'électromagnétisme : une formulation électrique pour le calcul de  $B$  et une formulation magnétique pour le calcul de  $J$ . Dans la mesure du possible, on résoudra un problème avec un même maillage mais deux formulations, bien que cette méthode double le coût en calculs. `Code_Carmel3D` utilisant des éléments linéaires pour la discrétisation des inconnues, sachant que  $B = \text{rot } A$  et  $J = \text{rot } T$ , il apparaît que  $B$  et  $J$  sont constants par tétraèdre. L'intégrale précédente est réduite à l'évaluation des grandeurs sur chaque élément, puis pour chaque nœud à sommer en pondérant par le quart du volume du tétraèdre.

Les tests qui suivent permettront de confirmer l'utilité de la double résolution. Il faut noter que pour les problèmes de la magnétostatique à courant imposé, une résolution en potentiel vecteur  $A$  suffit, le courant étant parfaitement connu.

## 2.2 Méthode de Urankar

Si l'influence du circuit magnétique peut être négligée et si les développantes peuvent être décomposées en un ensemble de parties droites et circulaires à sections rectangulaires, alors une équation analytique des forces peut être obtenue. La densité de courant  $J$  est parfaitement connue, le champ magnétique peut alors être exprimé à l'aide de la formule de Biot–Savart :

$$B(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{r' \in \Omega_c} \frac{J \times (r - r')}{\|r - r'\|^3}. \quad (2.2)$$

Pour des géométries quelconques, cette intégrale ne peut généralement pas être exprimée de manière simple. Il faut utiliser une intégration numérique. L. Urankar a calculé une expression de cette intégrale pour des inducteurs canoniques droites et coudes (URANKAR 1980, 1982a,b). Si la développante peut être décomposée en un ensemble d'inducteurs, alors en un point du conducteur la force de Laplace peut être calculée à partir de la somme des contributions magnétiques de chaque inducteur. Ces expressions peuvent être singulières en certains points (GYIMESI et al. 1993), l'annexe D présente des expressions valides pour ces points ainsi que des résultats de calcul analytiques. Il est de plus possible d'imposer une condition aux limites du type  $H \times n = 0$  en utilisant la méthode dite de l'« image » (LAWRENSON 1961), permettant de modéliser la présence du circuit magnétique du stator. Ainsi, la distribution de force peut être déterminée analytiquement à l'aide des forces de Laplace, champ et courant étant connus.

## 2.3 Méthode des travaux virtuels

Nous avons montré que l'expression des forces pour un problème d'électromagnétisme est donnée par la dérivation partielle de l'énergie ou de la coénergie par rapport au déplacement, en conservant les flux ou les circulations constants, respectivement. L'utilisation d'éléments de Whitney permet la conservation des flux de l'induction magnétique ou des circulations du champ magnétique. Pour un nœud  $k$  donné, la force est donnée par :

$$\partial_u \Phi(u, H) = -\partial_u \Psi(u, B), \quad (2.3)$$

ce qui se traduit pour le système discret :

$$F_u = \partial_u \Phi(u, \bar{h}) = -\partial_u \Psi(u, \bar{b}), \quad (2.4)$$

où  $\bar{h}$  et  $\bar{b}$  sont les degrés de liberté de  $B$  et  $H$ , respectivement. On considère alors l'ensemble des applications  $\{u_i\}$  telles que le nœud  $\mathcal{N}_i$  est déplacé, les autres étant fixes. La variation d'énergie est donc nulle pour tous les éléments n'ayant pas le nœud  $\mathcal{N}_i$  en commun. Le calcul se fait élément par élément, en sommant pour chaque nœud rencontré la contribution de l'élément. Ceci se traduit par :

$$F_{u_i} = \sum_{k_j \in \{k | \mathcal{N}_i \in k\}} \partial_{u_i} \Phi_{k_j}(u, \bar{h}) = \sum_{k_j \in \{k | \mathcal{N}_i \in k\}} -\partial_{u_i} \Psi_{k_j}(u, \bar{b}). \quad (2.5)$$

Cette grandeur est intrinsèquement liée au nœud  $\mathcal{N}_i$  et sera maintenant appelée « force nodale » du nœud.

### 2.3.1 Expression intégrale de l'énergie

Il est couramment admis que la densité d'énergie, ou de coénergie, présente dans un système électromagnétique est l'intégrale de  $B \cdot dH$ , respectivement  $H \cdot dB$ . Il faut cependant remarquer que ces intégrales sont vectorielles, elles doivent être réalisées sur un chemin défini. L'indépendance par rapport au chemin peut être montrée en considérant une fonction :

$$\mathcal{B}_x : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{B}^3, H \rightarrow \mathcal{B}_x(H) = B, \quad (2.6)$$

où  $(\mathbb{H}^3, \mathbb{B}^3)$  sont des parties de  $\mathbb{R}^3$ . La fonction  $\mathcal{B}_x$  a pour représentation dans la base cartésienne la matrice composée des termes  $\mathcal{B}_{xi} = \sum_{j=1\dots 3} \mu_{ij}(|H|)H_i$ . Pour un matériau non hystérétique, on peut supposer que le tenseur de perméabilité est symétrique. D'autre part, il faut supposer que l'ensemble des valeurs accessibles de  $B$  forment un domaine simplement connexe.  $\text{rot}_H \mathcal{B}_x = 0$  est une condition suffisante à vérifier<sup>1</sup> pour que l'intégrale :

$$\phi(u, H) = \int_0^1 B(\gamma) \partial_s \gamma ds, \quad (2.7)$$

soit indépendante de  $\gamma$ , ce qui est assuré pour un tenseur de perméabilité symétrique. Il en est de même pour la fonction  $\mathcal{H}_x$  et  $\text{rot}_B \mathcal{H}_x = 0$ .

---

1. La condition  $\text{rot } \mathcal{B}$  montre le fait que la forme est fermée, le théorème de Poincaré montre que la forme est exacte. Il faut écrire la primitive, puis appliquer le théorème des dérivations composées.

Pour un matériau linéaire isotrope (notre cas), les expressions des densités d'énergies suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
 \phi(u, B) &= \int_0^1 H(\gamma) \partial_s \gamma ds & \phi(u, H) &= \int_0^1 B(\gamma) \partial_s \gamma ds \\
 &= \int_{b=0}^B H \cdot db & &= \int_{h=0}^H H \cdot db \\
 &= \frac{\nu}{2} |B|^2 & &= \frac{\mu}{2} |H|^2 \\
 &= \frac{\nu}{2} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} & &= \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

### Dérivation de l'énergie magnétique

La dérivation de l'énergie magnétique doit être réalisée à flux constant (J.-L. COULOMB et MEUNIER 1984 ; REN et RAZEK 1992). Il est alors naturel d'exprimer cette dernière à l'aide de l'interpolation de  $B$  avec des éléments de facettes. Les DdL  $\bar{b}$  sont l'ensemble des flux au travers des facettes du maillage, les garder constants revient à conserver  $\bar{b}$  constant, les fonctions d'interpolations pouvant varier. Les formulations électriques donnent  $\bar{b} = R\bar{a}$ , où  $R$  est la matrice d'incidence arêtes / faces.

Sachant l'expression discrétisée de  $B$ , et la formule 2.4, il vient :

$$\Psi(u, \bar{b}) = \bar{b}^T \int_{\Omega} \frac{\nu}{2} \mathbf{W}_f^T \mathbf{W}_f \bar{b}, \tag{2.9}$$

avec  $\mathbf{W}_f$  la matrice assemblée par l'ensemble des valeurs vectorielles dans  $\mathbb{E}^3$  des fonctions d'interpolations de facettes au point considéré,  $(\Psi, \bar{b}, \mathbf{W}_f)$  pouvant être restreint au seul élément  $\mathbf{k}_j$  considéré. La dérivation n'interviendra donc que sur la matrice  $\mathbf{N}$  définie ainsi :

$$F_u = \bar{b}^T \partial_u \mathbf{N} \bar{b}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \frac{\nu}{2} \mathbf{W}_f^T \mathbf{W}_f, \tag{2.11}$$

$\partial_u \mathbf{N}$  n'est autre que la dérivation de l'opérateur de Hodge défini grâce à la méthode de Galerkin où  $\mathbf{N}$  est une expression<sup>2</sup> dans la base de  $\mathbb{E}^3$ . Ceci est en accord avec

---

2. Après multiplication à gauche par  $R^T$  et à droite par  $R$ , matrices indépendantes de la transformation  $u$ .

l'expression de l'énergie à l'aide des formes différentielles donnée par l'équation 1.15, où seul l'opérateur dépend du déplacement. Le résultat de la dérivation de  $\mathbf{N}$  donne :

$$\begin{aligned} \partial_{xyz} \mathbf{N} = & \int_K \frac{\nu}{\det \mathbf{J}} \mathbf{W}_f^T [\partial_{xyz} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{W}_f \\ & - \int_K \nu \mathbf{W}_f^T [\mathbf{J}^{-1}(\partial_{xyz} \mathbf{J}) + (\partial_{xyz} \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T}] \mathbf{W}_f, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{J}$  sont définies dans l'annexe B.

### Dérivation de la coénergie magnétique

En procédant de la même façon que pour l'énergie, en remarquant que la dérivation doit être réalisée en gardant les circulations du champ magnétique constantes, on utilise les formulations magnétiques avec  $H$  discrétisé par des éléments d'arêtes. Le vecteur  $\bar{b}$  est donné par  $\bar{b} = \bar{t} - G\bar{\phi}$  avec  $G$  la matrice d'incidence nœuds / arêtes. Connaissant l'expression discrétisée de  $H$ , et celle de la coénergie 2.4, il vient :

$$\Phi(u, \bar{h}) = \bar{h}^T \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \mathbf{W}_a^T \mathbf{W}_a \bar{h}, \quad (2.13)$$

avec  $\mathbf{W}_a$  la matrice assemblée par l'ensemble des valeurs vectorielles dans  $\mathbb{E}^3$  des fonctions d'interpolations d'arêtes au point considéré,  $(\Psi, \bar{b}, \mathbf{W}_f)$  pouvant être restreint au seul élément  $k_j$  considéré, et où seule la matrice  $\mathbf{M}$  définie comme suit dépend de  $u$ .

$$F_u = \bar{h}^T \partial_u \mathbf{M} \bar{h}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \mathbf{W}_a^T \mathbf{W}_a. \quad (2.15)$$

Si l'on considère une formulation magnétique, en appliquant la méthode de Galerkin à l'ensemble des éléments nodaux on retrouve une des constructions possibles de l'opérateur de Hodge<sup>3</sup>. Le calcul de la dérivée de  $\mathbf{M}$  donne :

$$\begin{aligned} \partial_{xyz} \mathbf{M} = & \int_K \frac{\mu}{\det \mathbf{J}} \mathbf{W}_a^T [\partial_{xyz} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{W}_a \\ & - \int_K \mu \mathbf{W}_a^T [(\partial_{xyz} \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T} + \mathbf{J}^{-1}(\partial_{xyz} \mathbf{J})] \mathbf{W}_a. \end{aligned} \quad (2.16)$$

---

3. A l'instar de ce qui a été fait avec la formulation  $\mathbf{A}$ , on trouve une matrice assemblée à partir des éléments nodaux. Cette fois multipliée par  $G^T$  et  $G$ .

Le détail des calculs et la définition des matrices sont donnés en annexe B. Ces matrices sont basées sur la dérivée de la matrice jacobienne apparaissant lors du passage à l'élément de référence.

### 2.3.2 Cas des matériaux non linéaires ou magnétostrictifs

On peut encore exprimer sous forme intégrale la valeur des densités d'énergie pour un matériau non linéaire. Ce calcul est réalisé dans la référence REN (1997). Exprimé dans l'élément de référence il vient :

$$\Psi(u, B) = \int_{\Omega} \int_0^1 H(\gamma) \partial_s \gamma ds, \quad (2.17)$$

$$\Phi(u, H) = \int_{\Omega} \int_0^1 B(\gamma) \partial_s \gamma ds, \quad (2.18)$$

$\gamma$  variant de 0 à  $B$  et de 0 à  $H$  respectivement. La dérivation par rapport au déplacement donne un terme supplémentaire :

$$\partial_u \Psi = \int_{\hat{v}} \frac{\nu}{2} \bar{b}^T \mathbf{W}_f^T \partial_u \left[ \frac{\mathbf{J} \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} \right] \mathbf{W}_f \bar{b} + \int_0^1 H(\gamma) \partial_s \gamma \det \mathbf{J} ds, \quad (2.19)$$

$$\partial_u \Phi = \int_{\hat{v}} \frac{\mu}{2} \bar{b}^T \mathbf{W}_f^T \partial_u [\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} \det(\mathbf{J})] \mathbf{W}_f \bar{b} + \int_0^1 B(\gamma) \partial_s \gamma \det \mathbf{J} ds. \quad (2.20)$$

Si le matériau est supposé magnétostrictif alors  $\mu$  et  $\nu$  dépendent non seulement des champs mais aussi de la contrainte mécanique  $\sigma$ . Vient se rajouter après calcul



le dernier terme :

$$\begin{aligned} \partial_u \Psi = & \int_{\hat{v}} \frac{\nu \bar{b}^T}{2} \mathbf{W}_f^T \partial_u \left[ \frac{\mathbf{J} \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} \right] \mathbf{W}_f \bar{b} \\ & + \int_0^1 [H(\gamma) \det \mathbf{J} + \partial_\sigma \nu B(\gamma) \partial_u \sigma \det \mathbf{J}] \partial_s \gamma ds, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_u \Phi = & \int_{\hat{v}} \frac{\mu \bar{b}^T}{2} \mathbf{W}_f^T \partial_u [\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} \det(\mathbf{J})] \mathbf{W}_f \bar{b} \\ & + \int_0^1 [B(\gamma) \det \mathbf{J} + \partial_\sigma \mu H(\gamma) \partial_u \sigma \det \mathbf{J}] \partial_s \gamma ds. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ces deux dernières équations permettent d'envisager la résolution de problèmes magnéto-mécaniques couplés avec prise en compte de la magnétostriction ou les non-linéarités.

### 2.3.3 Application de la méthode des travaux virtuels aux aimants

La méthode des travaux virtuels peut être appliquée aux cas des matériaux aimantés. L'annexe C montre que deux définitions de l'énergie sont possibles, donnant cependant des distributions différentes, les grandeurs globales étant égales.

# Chapitre 3

## Comparaison numérique des méthodes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Description des cas tests . . . . .</b>	<b>138</b>
3.1.1	Cas d'une spire circulaire à section carrée . . . . .	138
3.1.2	Cas d'une barre parcourue par un courant uniforme . .	139
3.1.3	Cas de la sphère pleine . . . . .	140
<b>3.2</b>	<b>Résultats obtenus . . . . .</b>	<b>141</b>
3.2.1	Généralités . . . . .	141
3.2.2	Résultats pour la spire . . . . .	142
3.2.3	Résultats pour le cube . . . . .	143
3.2.4	Résultats pour la sphère . . . . .	143
<b>3.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>144</b>

---

Si les principes de calcul des forces locales décrits dans ce qui précède doivent donner les mêmes distributions de forces (exception faite des aimants), leur application peut donner des résultats numériques différents. Il a fallu déterminer les méthodes de calcul les plus adéquates pour un problème donné.

### 3.1 Description des cas tests

Les cas tests sélectionnés permettent de tester la précision des différentes méthodes par rapport à leur solution analytique. Les cas ont été sélectionnés afin de tester le calcul en magnétostatique, des perméabilités quelconques ou encore des problèmes dynamiques.

#### 3.1.1 Cas d'une spire circulaire à section carrée

Ces équations sont obtenues à partir de l'intégration exacte de la loi de Biot-Savart pour des barres ou des coudes à section rectangulaire. On suppose que la perméabilité est uniforme sur tout le domaine. Ce cas est spécialement destiné au test des conducteurs plongés dans l'air parcourus par une densité de courant uniforme. Le cas étudié est celui d'une spire circulaire (figure 3.1) avec les paramètres reportés dans la table 3.1.

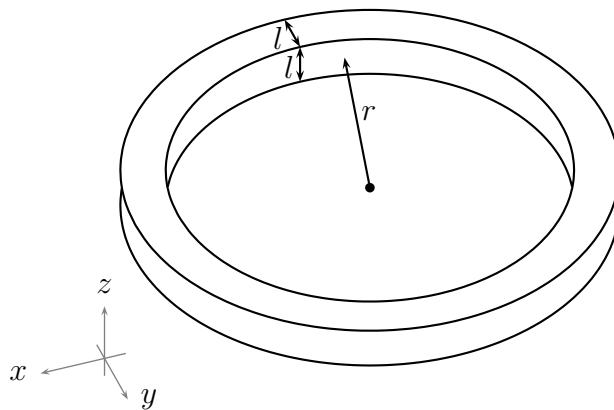


FIGURE 3.1 – Détail de la géométrie de la bobine.

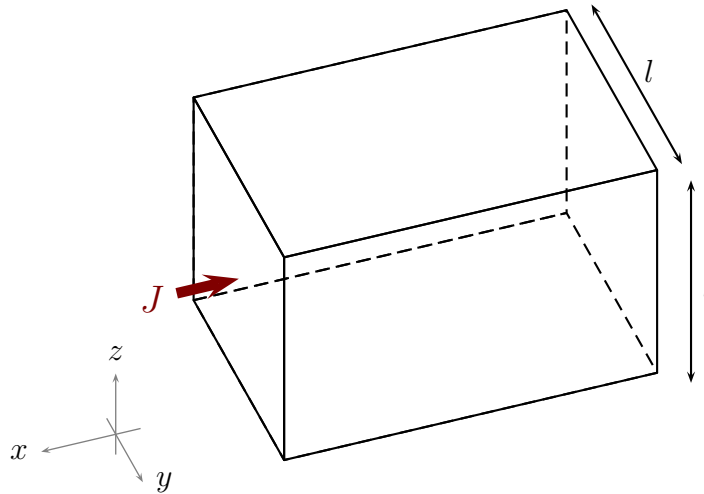
Rayon	$r = 1 \text{ cm}$
Section	$l = 2 \text{ mm}$
Perméabilité relative $\mu_r$	Unitaire
Courant total	$I = 10 \text{ A}$

**TABLE 3.1** – *Détail des paramètres du cas test d'une spire circulaire à section carrée.*

### 3.1.2 Cas d'une barre parcourue par un courant uniforme

Il s'agit d'un modèle 2D d'une barre supposée infiniment longue parcourue par une densité de courant uniforme normale à la section. Le cube est supposé d'arête  $a$  placé entre  $(0, 0)$  et  $(a, a)$  avec la condition  $n \cdot B = 0$  sur les surfaces. L'expression analytique est détaillée dans la partie V.

La forme analytique du champ magnétique est obtenue à partir de l'expression du potentiel vecteur  $A$  décomposé en série de Fourier et dont on a appliqué les conditions aux limites. La figure 3.2 représente un schéma du cas. Le calcul est détaillé dans la partie V, et les paramètres géométriques sont reportés dans la table 3.2.



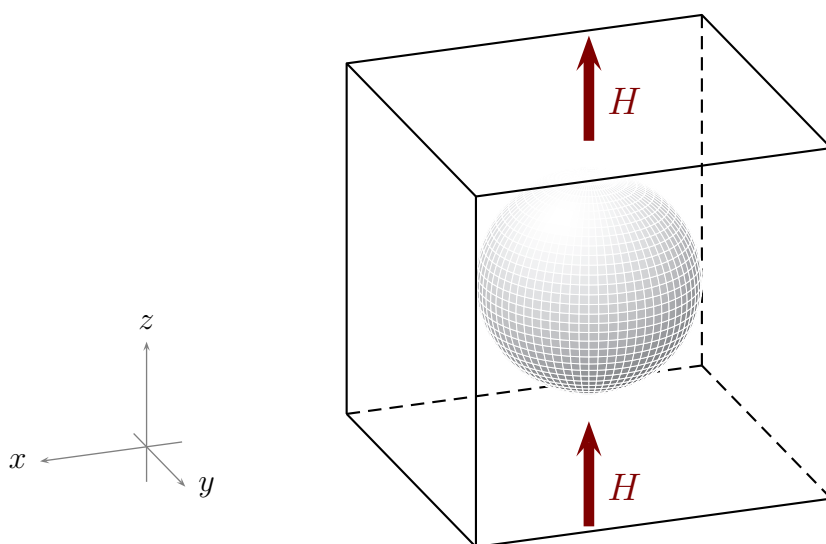
**FIGURE 3.2** – *Détail de la géométrie de la barre.*

Longueur d'arête	$l = 1 \text{ m}$
Densité de courant	$\ J\  = 1 \text{ Am}^{-2}$
Perméabilité relative $\mu_r$	Unitaire
$(n_{max}, p_{max})$	500

**TABLE 3.2** – *Détail des paramètres pour le cas test de la barre. Les entiers  $n$  et  $p$  représentent le nombre de termes considérés dans la série.*

### 3.1.3 Cas de la sphère pleine

Les deux cas précédents sont des problèmes de magnétostatique, ce troisième permet de tester les cas magnétodynamiques. Il s'agit d'une sphère pleine plongée dans un champ magnétique pulsant. Comme pour le cas du cube, l'expression en potentiel vecteur  $A$  permet de calculer les grandeurs électriques en tout point de la sphère (DULAR 1994). Le schéma du cas considéré est présenté dans la figure 3.3 et les paramètres géométriques sont reportés dans la table 3.3.



**FIGURE 3.3** – *Détail de la géométrie de la sphère.*

Rayon	$r = 1\text{cm}$
Norme du champ magnétique	1 T
Perméabilité relative $\mu_r$	Unitary
Conductivité ( $\sigma$ )	1e7 S/m
Fréquence	50 Hz

TABLE 3.3 – Paramètres utilisés pour le cas de la sphère.

## 3.2 Résultats obtenus

### 3.2.1 Généralités

#### Test effectués

Pour chaque cas, nous calculons les forces nodales par les méthodes suivantes :

- forces de Laplace, résolution avec la formulation  $A$  ;
- forces de Laplace, résolution avec la formulation  $\Omega$  ;
- forces de Laplace duales  $B = \text{rot } A$  (formulation électrique) et  $J = J_s + \text{rot } T$  (formulation magnétique) ;
- travaux virtuels avec l'expression de l'énergie ;
- travaux virtuels avec l'expression de la coénergie.

L'erreur est calculée à l'aide de la méthode analytique correspondante :

- les forces de Laplace analytiques sont prises comme référence pour le calcul numérique des forces de Laplace ;
- la référence pour la méthode numérique des travaux virtuels est calculée par l'application numérique de la méthode des travaux virtuels aux grandeurs magnétiques analytiques.

Ces deux jeux de données ont été calculés pour des maillages de finesse croissante, il a été choisi de régénérer un maillage complet pour chaque cas. Ainsi on s'assure que les performances relatives des méthodes ne sont pas dues aux particularités du maillage.

#### Critère de précision

Ce critère permet de juger globalement de la qualité de la solution, sans pour autant être pénalisé par les nœuds pour lesquels la norme du champ est faible

(pour ne pas faire « ressortir » le bruit numérique issu de la méthode des travaux virtuels). On réalise le calcul de l'erreur relative de la solution par rapport à la norme  $\mathcal{L}^2$  de la solution analytique. Ainsi pour la densité de force, on définit :

$$\epsilon^{\%} = \left[ \frac{\int_{\Omega} \|F_{num} - F_{ana}\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\int_{\Omega} \|F_{ana}\|_{\mathcal{L}^2}^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Pour le champ ponctuel issu de la méthode des travaux virtuels,  $\epsilon^{\%}$  est calculé ainsi :

$$\epsilon^{\%} = \left[ \frac{\sum_{\text{Nœuds}} \|F_{num} - F_{ana}\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\sum_{\text{Nœuds}} \|F_{ana}\|_{\mathcal{L}^2}^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Résultats pour la spire

Les résultats de calcul (figure 3.4) ne montrent aucune différence entre la méthode des forces de Laplace utilisant la formulation « tout »  $A$  et celle calculée à partir des deux formulations. La source étant parfaitement connue, la précision ne dépend que du calcul de  $B$ , lequel est déterminé avec plus de précision en utilisant une formulation électrique. Les grandes valeurs d'erreur pour les maillages lâches sont dues au très faible nombre d'éléments composant la spire.

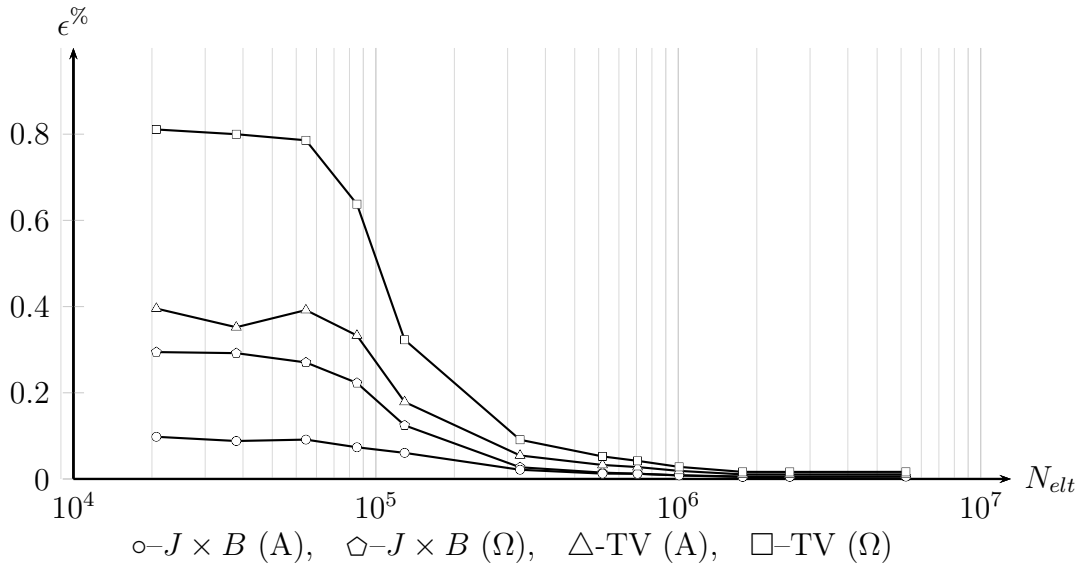


FIGURE 3.4 – Résultats pour la spire.

### 3.2.3 Résultats pour le cube

Il s'agit ici d'un cube de perméabilité relative unitaire. La meilleure méthode, pour ce cas, reste celle utilisant le calcul des forces de Laplace à partir de la formulation électrique.

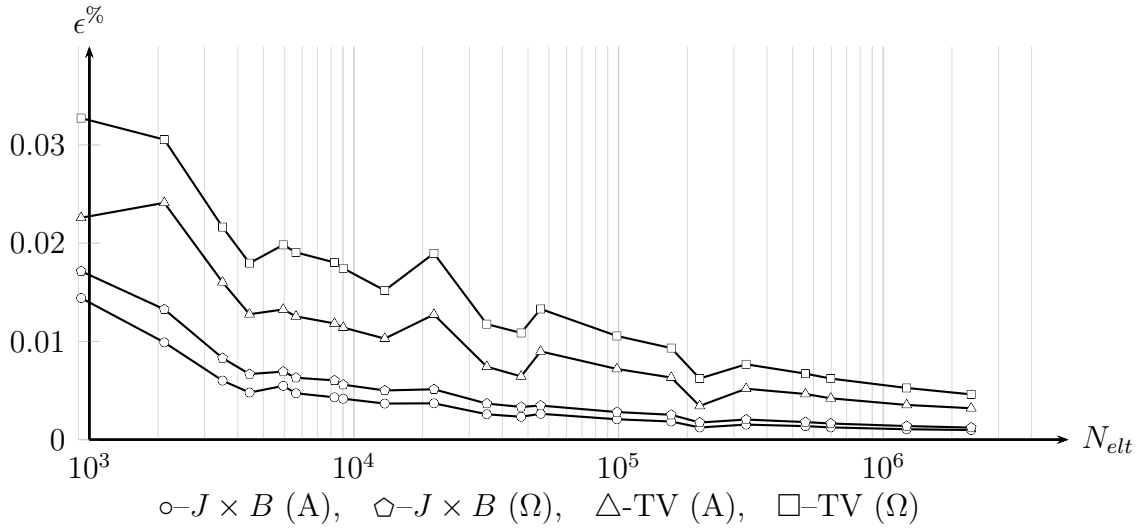


FIGURE 3.5 – Résultats de calcul pour le cube.

### 3.2.4 Résultats pour la sphère

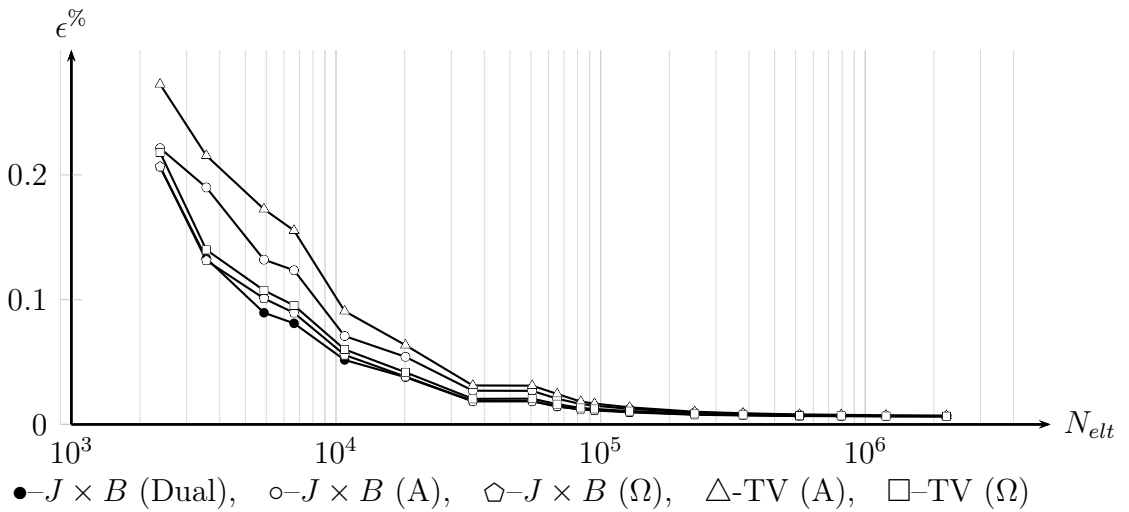


FIGURE 3.6 – Résultats de calculs pour la sphère.



Ce cas est utilisé pour le test des différentes méthodes appliquées dans le cadre de problèmes de magnétodynamique. On montre cette fois-ci un résultat déjà obtenu dans REN (1994) : si l'on veut utiliser les forces de Laplace pour le calcul de forces en magnétodynamique, il est préférable de résoudre les deux formulations. La bonne précision sur les valeurs de  $B$  est obtenue à partir de la formulation électrique en prenant  $B = \text{rot } A$ . Pour  $J$ , on préfère résoudre la formulation magnétique et prendre  $J = J_s + \text{rot } T$ .

### 3.3 Conclusion

Ces divers exemples permettent de déterminer la démarche la plus appropriée pour un type de problème :

- *Conducteur massifs dans l'air*

Où, plus généralement, systèmes à courant imposé et à perméabilité uniforme. La répartition de la densité de courant étant connue, on peut se contenter de résoudre le problème de magnétostatique en  $A$ . Les forces données par l'expression de Laplace semblent être les plus précises.

- *Conducteurs dans l'air avec courants induits*

Il est montré qu'il est préférable, si possible, de résoudre deux fois le problème par les deux formulations. La meilleure précision sera obtenue en utilisant l'expression mixte des forces de Laplace.

- *Problème à perméabilité non uniforme*

L'expression de Laplace n'est plus applicable. Seul le principe des puissances virtuelles sera en mesure de donner la bonne expression des forces. On utilisera l'énergie ou la coénergie en accord avec la formulation choisie.

- *Cas des aimants*

Il faut dans ce cas modifier de façon adéquate les expressions des forces exprimées à l'aide des puissances virtuelles. Il ne faut cependant pas oublier que la répartition des efforts dépendra de la loi constitutive choisie et ne représentera pas la réalité. Les grandeurs globales sont correctes.

## QUATRIÈME PARTIE

### Transfert de solutions entre maillages déconnectés



# Introduction

Les phénomènes entraînant l'usure des parties frontales des alternateurs peuvent être d'origines magnétique, mécanique ou thermique, leurs modélisations requiert donc l'utilisation de schémas couplant les différentes physiques. Suite aux premières études multi-physiques évoquées par TROWBRIDGE (1988), deux grands types de couplages ont été développés : les couplages dits « forts » et ceux dits « faibles ».

Proposés par exemple dans le cadre d'une étude magnéto-thermique par MOLFINO et REPETTO (1989), les couplages forts rassemblent au sein d'une même matrice les équations gouvernant chacune des physiques et les équations de couplage. Ce type de modèle est particulièrement adapté aux phénomènes fortement couplés, mais possède de nombreux désavantages parmi lesquels on peut citer la nécessité de développer un code spécifique ou encore celle de stocker de grandes matrices. De plus, les systèmes matriciels peuvent ne pas être symétriques et sont souvent mal conditionnés, allongeant de façon significative les temps de calculs par rapport aux temps requis pour la résolution d'une seule des physiques (HAMEYER et al. 1999 ; SCHMIDT 2011).

Bien que les couplages forts soient préférés pour leur meilleure convergence sur des problèmes fortement couplés (BESBES et al. 1996), les méthodes de couplages faibles restent utilisées en raison des nombreux avantages qu'elles présentent. Ces méthodes reposent sur un schéma du type prédiction / correction et ont donc initialement été utilisées pour leur caractère moins gourmand en mémoire. Outre ce gain sur l'espace mémoire, les couplages faibles présentent l'avantage de permettre de coupler des codes de structures hétérogènes et qui ne sont pas, *a priori*, destinés à être utilisés ensemble. Dès la fin des années 1980, MASSE et al. (1985) et BASTOS et al. (1990) proposent des modèles magnéto-thermiques. REN et RAZEK et CRUTZEN et al. (1994) proposent quant à eux dans les années 1990 des modèles magnéto-mécaniques. En 1996, BESBES et al. comparent ces deux types de couplages. Ces méthodes restent répandues, divers travaux présentent des couplages faibles de

tous types (BASTOS et al. 1997, DELAERE et al. 1999, SCHMIDT et GRABNER 2005). Plus récemment des chaînes directes, couplant des modèles temporels à des modèles harmoniques, sont apparues (RAINER et al. 2010 ; PELLEREY et al. 2012). Les méthodes de couplages faibles peuvent de plus servir à découpler les pas de temps, le nombre de résolutions nécessaires pouvant ainsi être réduit dans le cas de physiques à constantes de temps très différentes (HAMEYER et al. 1999 ; SCHMIDT 2011). Elles sont désormais utilisées pour coupler des méthodes n'étant pas compatibles avec un couplage fort (par exemple harmonique ou temporelle), et servent aussi à la réutilisation de logiciels existants ou commerciaux.

Outre le type de couplage utilisé, il est possible de travailler avec un nombre variable de maillages : un maillage unique ou un maillage par physique. L'utilisation d'un seul maillage permet de considérablement simplifier le processus d'assemblage de matrices dans le cadre d'un couplage fort, et simplifie la phase d'échange de données dans le cadre d'un couplage faible. Cette solution peut rapidement se révéler limitante dès lors que certaines mailles doivent être modifiées (cas d'une adaptation de maillage ou d'une prise en compte du mouvement). De surcroît, si l'une des physiques ne concerne qu'une partie de la géométrie, l'utilisation d'un seul maillage peut entraîner un surcoût en mémoire. L'utilisation d'un maillage distinct pour chacune des physiques permet son adaptation numérique. De plus, si une méthode de couplage faible est utilisée, ces maillages peuvent être topologiquement adaptés au domaine d'étude, réduisant ainsi l'occupation de la mémoire nécessaire à la résolution du problème. Cependant, pour un couplage fort, des matrices supplémentaires sont à assembler, entraînant un surcoût en mémoire et conduisant la plupart du temps à des systèmes non symétriques.

Les méthodes multi-maillages sont évoquées par TSUKERMAN (1992) pour connecter les maillages rotoriques et statoriques d'une machine électrique. Ces méthodes présentent un moyen de coupler surfaciquement deux domaines éléments finis par des fonctions scalaires. Les méthodes multi-maillages comptent parmi les premières applications dans le domaine de l'électromagnétisme des méthodes de type multiplicateurs de Lagrange (TSUKERMAN 1992), par la suite remplacées par les méthodes de types Mortar (BERNARDI et al. 1993). GEUZAIN et al. (1999) proposent une méthode de projection pour des maillages à intersection volumique, méthode bien adaptée aux transferts de données utilisés pour les couplages faibles.

De part la complexité de la structure des cages de développantes, il a été choisi

d'utiliser pour ce travail un maillage distinct pour les modèles magnétique et mécanique. De plus, afin de pouvoir utiliser les logiciels pré-existants développés par EDF, un modèle de couplage faible est privilégié.

Cette partie est focalisée sur la présentation des méthodes de transfert de solutions entre maillages. Après une présentation théorique des méthodes mises en œuvre, celles-ci sont testées numériquement afin de comparer leurs précisions. Les performances des méthodes de transfert sont généralement fortement dépendantes de la mise en œuvre pratique. Un dernier chapitre est consacré aux algorithmes utilisés pour l'élaboration de ces méthodes.



# Chapitre 1

## Méthodes de transferts

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Problématique</b>	<b>152</b>
<b>1.2</b>	<b>Interpolation</b>	<b>153</b>
1.2.1	Principe de base	153
1.2.2	Estimation de l'erreur	153
1.2.3	Conclusion	154
<b>1.3</b>	<b>Projection Orthogonale – Méthode de Galerkin</b>	<b>155</b>
1.3.1	Méthode générale	155
1.3.2	Minimisation $\mathcal{L}^2$	157
1.3.3	Minimisation de Sobolev	158
1.3.4	Semi-normes en opérateurs différentiels	159
<b>1.4</b>	<b>Projection Conservative</b>	<b>160</b>
1.4.1	Cas des nœuds	160
1.4.2	Cas des arêtes et des faces	161

---



Ce chapitre présente trois types de méthodes de transfert utilisables pour le couplage de modèles. Nous commencerons par présenter des méthodes classiques d'interpolation de solutions, souvent utilisées pour les couplages et souvent synonymes de transfert de solutions entre maillages. Puis nous présenterons une méthode basée sur la projection orthogonale d'une solution sur l'espace engendré par le maillage cible. Enfin nous détaillerons une méthode peu répandue, néanmoins intéressante, basée sur la conservation locale de la solution.

## 1.1 Problématique

Les méthodes de transfert présentées étant destinées à être utilisées dans des schémas de couplages, les transferts doivent autant que possible être précis et conservatifs. Le caractère précis vise à minimiser les modifications apportées au champ considéré, alors que le caractère conservatif tend à préserver une quantité donnée (par exemples le déplacement, une puissance...). Dans le cadre de modèles couplés, plusieurs étapes de transferts successifs sont nécessaires. Afin de ne pas accumuler les erreurs il est donc important de disposer d'une méthode qui possède les propriétés précédemment citées.

Soient deux domaines maillés,  $\mathcal{D}_s$  et  $\mathcal{D}_c$ , et leur pavage cellulaire associé, respectivement  $\mathcal{T}_s$  et  $\mathcal{T}_c$ . Le transfert de solution est opéré sur l'intersection des deux domaines  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_s \cap \mathcal{D}_c$ . Les fonctions *source* et *cible*,  $u_s$  et  $u_t$ , sont discrétisées sur  $N$ , respectivement  $M$ , éléments finis donnés. L'objectif des méthodes de transfert est de déterminer l'ensemble des DdL  $\{d_i\}$  de la fonction  $u_c = \sum_{i=1}^N d_i w_i$  tels que le résidu  $\epsilon = \|u_c - u_s\|$  soit minimal.

La précision locale est déterminée à partir de la norme :

$$\|u_c - u_s\|^2 = (u_c - u_s)^\top (u_c - u_s). \quad (1.1)$$

La précision globale est quant-à-elle donnée par l'intégrale du résidu définie par le produit scalaire choisi pour la projection  $\left(\int_{\mathcal{D}_p} \epsilon\right)$ . Cette intégrale est étroitement liée au caractère conservatif du processus de transfert entre maillages.

## 1.2 Interpolation

### 1.2.1 Principe de base

La méthode d'interpolation reprend la définition des éléments de Whitney présentés en partie I, chapitre 2. Les poids (ou DdL) associés aux nœuds, arêtes, faces et volumes sont respectivement les valeurs de la fonction aux nœuds, les circulations sur les arêtes, les flux au travers des faces et les intégrales sur les éléments de volume :

$$d_i^n = f(x_i), \quad (1.2a)$$

$$d_i^a = \int_{\gamma=\text{arête } i} u(\gamma(s)) \cdot ds, \quad (1.2b)$$

$$d_i^f = \int_{S=\text{face } i} u(s) \cdot n(s) dS, \quad (1.2c)$$

$$d_i^v = \int_{V=\text{volume } i} u(s) \cdot n(s) dV. \quad (1.2d)$$

$x_i$  représente la position du  $i^{\text{ème}}$  nœud,  $s$  la position locale sur l'élément orienté, et  $\gamma$ ,  $S$  et  $V$  respectivement des segments, faces et volumes orientés.

L'interpolation nodale requiert uniquement la localisation de chacun des sommets du maillage cible dans le maillage source. Une fois les éléments hôtes connus, il est possible d'interpoler la fonction source  $u_s$  pour chaque nœud du maillage cible. En ce qui concerne les arêtes, les faces et les volumes, une construction explicite des intersections entre l'élément considéré et le maillage source est nécessaire. Pour chacune des intersections, une intégrale élémentaire est calculée par interpolation de la fonction source aux différents points de la quadrature. La valeur finale du DdL est la somme des intégrales élémentaires calculées.

### 1.2.2 Estimation de l'erreur

La fonction  $u_s$  est supposée être discrétisée par des éléments nodaux, celle-ci appartient donc intrinsèquement à  $\mathcal{H}^2$  et peut être vue comme quelconque par rapport au second maillage ( $u_s = u_f$ ).

**Proposition** – Pour tout  $u_f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}^2$  (partie I, chapitre 4.2), on a :

$$\|u_s - u_c\|_{\mathcal{L}^2, \mathcal{K}} \leq C_{\mathcal{K}} (h_c^2 + h_s^2), \quad (1.3)$$

avec  $C_{\mathcal{K}}$  une constante indépendante du maillage. La distance entre la fonction interpolée au second maillage et la fonction source est d'ordre 2 en norme  $\mathcal{L}^2$ . La démonstration est disponible dans JIAO et HEATH (2004), et sous une forme différente dans CAI (1995).

Si la fonction est discrétisée par des éléments de Nédélec ou de Raviart-Thomas, alors elle appartient à  $\mathcal{H}^1$  pour chaque volume considéré et la norme 2 de l'erreur est d'ordre 1.

**Proposition** – Pour tout  $u_f \in \mathcal{H}^1$  et  $\text{div } u_f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}^1$ , on a :

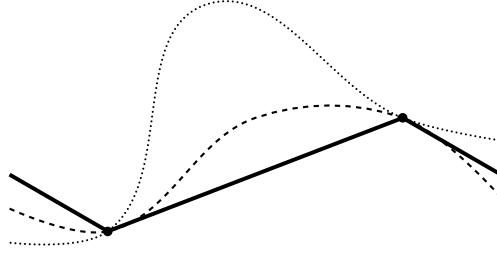
$$\|u_s - u_c\|_{\mathcal{L}^2, \mathcal{K}} \leq C_{\mathcal{K}} (h_c + h_s). \quad (1.4)$$

La démonstration étant réalisé de la même façon à l'aide des erreurs de l'interpolant (partie I, chapitre 4.2).

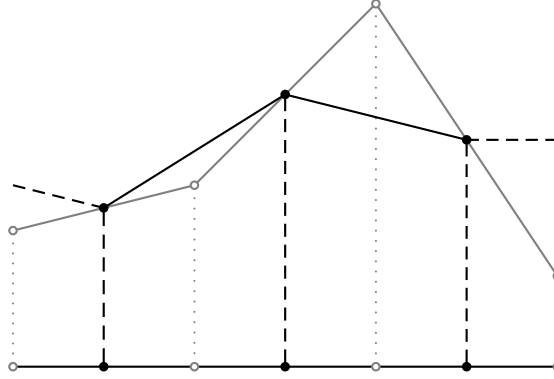
L'erreur globale est donnée par la somme des bornes précédentes définies pour chaque élément, l'ordre de l'erreur étant inchangé.

### 1.2.3 Conclusion

Si cette technique semble la plus respectueuse de la définition donnée aux différents DdL, elle demeure très diffusive (la solution tend à être lissée, les extrema étant aplatis) et doit préférablement être utilisée pour un chaînage simple ou une fonction pour laquelle la dérivée seconde est faible sur l'élément hôte. La figure 1.1 donne l'exemple de deux fonctions, interpolées de la même manière mais possédant des dérivées secondes très différentes : l'erreur d'interpolation est plus élevée pour la fonction possédant la plus grande dérivée seconde. Ainsi, pour la méthode d'interpolation, la fonction source étant a priori inconnue, le maillage cible n'est pas forcément adapté. Un exemple concret est donné en figure 1.2.



**FIGURE 1.1** – Exemple de fonctions produisant la même fonction discrète (ligne brisée noire). La fonction en pointillés possède une dérivée seconde plus grande que la fonction en tirets.



**FIGURE 1.2** – Exemple unidimensionnel d'une fonction interpolée (en noir) : l'interpolation peut ne plus correspondre à la fonction initiale (en gris).

## 1.3 Projection Orthogonale – Méthode de Galerkin

### 1.3.1 Méthode générale

La méthode de projection orthogonale cherche à minimiser pour tout point de l'espace, la distance, induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , entre les fonctions  $u_s$  et  $u_c$ . Les fonctions sont respectivement discrétisées sur les pavages  $\mathcal{T}_s$  et  $\mathcal{T}_c$  :  $u_s = \sum_{i=1}^{K_s} w_{s_i} d_{s_i}$  et  $u_c = \sum_{i=1}^{K_c} w_{s_i} d_{c_i}$ . On cherche l'ensemble des DdL globaux  $d_i$  pour lequel la norme  $\|\cdot\|$  sur le domaine de projection  $\mathcal{D}_p$  soit minimale :

$$\begin{aligned} \partial_{d_{c_i}} \|u_c - u_s\|_{\mathcal{D}_p}^2 &= 0, \quad \forall d_{c_i}, \quad i = 1 \dots K_c \\ \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p} &= \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_p}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Remplaçons  $u_c$  par sa décomposition sur les fonctions de formes  $w_c$  :

$$\begin{aligned}
\partial_{d_{c_i}} \|u_c - u_s\|_{\mathcal{D}_p}^2 &= \partial_{d_{c_i}} \left\| \sum_{j=1}^{K_c} w_{c_j} d_{c_j} - u_c \right\|_{\mathcal{D}_p}^2 \\
&= \partial_{d_{c_i}} \sum_{j=1}^{K_c} \|w_{c_j} d_{c_j}\|_{\mathcal{D}_p}^2 - 2 \partial_{d_{c_i}} \sum_{j=1}^{K_c} \langle w_{c_j} d_{c_j}, u_s \rangle_{\mathcal{D}_p} + \partial_{d_{c_i}} \|u_s\|_{\mathcal{D}_p}^2 \\
&= 2 \langle w_{c_i}, \sum_{j=1}^{K_c} w_{c_j} d_{c_j} \rangle_{\mathcal{D}_p} - 2 \langle w_{c_i}, u_s \rangle_{\mathcal{D}_p} \\
&= 2 \langle w_{c_i}, u_c \rangle_{\mathcal{D}_p} - 2 \langle w_{c_i}, u_s \rangle_{\mathcal{D}_p} = 0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Cette équation se traduit par un système linéaire résolu pour toutes les fonctions de formes  $w_{c_i}$  pour lesquelles  $\|w_{c_i}\|_{\mathcal{D}_p} \neq 0$ , soient toutes celles dont le support (ou une partie du support) appartient à  $\mathcal{D}_p$ . Un système linéaire du type  $[M][D_c] = [F]$  est à résoudre, les matrices  $[M]$  et  $[F]$  étant ainsi définies :

$$M_{ij} = \langle w_{c_i}, w_{c_j} \rangle_{\mathcal{D}_p}, \tag{1.7a}$$

$$F_i = \langle w_{c_i}, u_s \rangle_{\mathcal{D}_p}. \tag{1.7b}$$

Cette méthode peut aussi être interprétée comme étant l'application de la méthode de Ritz-Galerkin à l'équation  $u_s = u_c$ , où les fonctions tests sont choisies parmi les fonctions de base du second maillage (approximation conforme). Certaines conséquences de la méthode s'appliquent donc :

- l'approximation  $u_c$  est optimale : la distance  $\|u_c - u_s\|$  est la plus petite permise par les discrétisations. De plus, la solution  $u_c$  est unique ;
- d'après la propriété d'orthogonalité de Galerkin, le résidu  $u_c - u_s$  est orthogonal à l'espace des fonctions engendré par la base des  $\{w_{c_i}\}$ . Cette propriété définit aussi une propriété de conservation de la méthode :

$$\langle u_c, 1 \rangle_{\mathcal{D}_p} = \langle u_c + u_s - u_c, 1 \rangle_{\mathcal{D}_p} = \langle u_s, 1 \rangle_{\mathcal{D}_p}; \tag{1.8}$$

- la matrice  $[M]$  est très creuse, symétrique, définie et positive, laissant un large choix de solveur pour la résolution. Plus particulièrement pour la norme  $\mathcal{L}^2$ , sous réserve d'une bonne qualité du maillage cible,  $[M]$  est bien conditionnée et le système peut être résolu de manière efficace par des méthodes itératives ;
- la méthode a un effet stabilisant et la norme est minorée :

$$\|u_c\|_{\mathcal{D}_p}^2 \leq \|u_c\|_{\mathcal{D}_p}^2 + \|(u_c - u_s)\|_{\mathcal{D}_p}^2 = \|u_s^2\|_{\mathcal{D}_p} + 2\langle u_s - u_c, u_c \rangle = \|u_s\|_{\mathcal{D}_p}^2. \tag{1.9}$$

### 1.3.2 Minimisation $\mathcal{L}^2$

La méthode peut être utilisée avec le produit scalaire de  $\mathcal{L}^2$  :

$$(u, v) \in \mathcal{L}^2, \quad \langle u, v \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{D}_p)} = \int_{\mathcal{D}_p} u v. \quad (1.10)$$

Les termes élémentaires des matrices sont alors :

$$M_{ij} = \int_{\{\mathcal{K}_{ij}\}} w_i w_j, \quad (1.11a)$$

$$F_i = \int_{\{\mathcal{K}_i\}} w_i u_s, \quad (1.11b)$$

où  $\{\mathcal{K}_{ij}\}$  dénote le domaine commun au support de  $w_i$  et de  $w_j$  appartenant aussi au domaine de la projection  $\mathcal{D}_p$ . Ainsi  $\{\mathcal{K}_{ij}\} = [\mathcal{D}(w_i) \cup \mathcal{D}(w_j)] \cap \mathcal{D}_p$ . De même  $\{\mathcal{K}_{ij}\}$  représente le support de  $w_i$  compris dans  $\mathcal{D}_p$ <sup>1</sup>.

**Évaluation de l'erreur** Soit  $u_{c_o}$  la fonction cible obtenue par projection orthogonale et  $u_{c_i}$  celle obtenue par la méthode d'interpolation. D'après la méthode de Ritz–Galerkin, toute fonction  $u$  appartenant à l'espace fonctionnel généré par les fonctions de forme cible respecte  $\|u_{c_o} - u_s\| \leq \|u - u_s\|$ . Cette relation est en particulier vraie pour la fonction  $u_{c_i}$  issue de l'interpolation. D'après 1.2, cette borne varie en  $O(h_s^2 + h_c^2)$  pour le cas de fonctions nodales, et varie en  $O(h_s + h_c)$  pour le cas de fonctions d'arêtes et de faces.

La norme de la fonction ainsi projetée est toujours sous-évaluée :

$$\begin{aligned} \|u_c\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2 &\leq \|u_c\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2 + \|u_s - u_c\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2, \\ &= 2\|u_c\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2 + \|u_s\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2 - 2\langle u_s, u_c \rangle_{\mathcal{L}^2, \Omega}, \\ &= \|u_s\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2 + 2\langle u_c - u_s, u_c \rangle_{\mathcal{L}^2, \Omega}, \\ &= \|u_s\|_{\mathcal{L}^2, \Omega}^2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

à l'aide de l'orthogonalité de Galerkin. La relation est identique en norme  $\mathcal{H}^{\mathcal{X}}$ .

---

1. Dans les deux cas, le support de la fonction de forme peut ne pas être entièrement contenu dans le domaine de projection.

**Avantages et inconvénients du produit de  $\mathcal{L}^2$**  Le produit scalaire de  $\mathcal{L}^2$  permet d'obtenir la solution la plus proche globalement de la fonction source. Cependant des valeurs aberrantes dues à un phénomène proche de celui de Gibbs peuvent apparaître (JIAO et HEATH 2004). Un exemple numérique est présenté en annexe F. Des classes différentes de fonctions tests peuvent être utilisées (WANG et al. 2013).

### 1.3.3 Minimisation de Sobolev

Ce deuxième type de produit scalaire permet de limiter les extrema locaux dus aux brusques variations de  $u_s$  tout en gardant le contrôle, si besoin est, sur les dérivées spatiales. Nous appellerons normes de Sobolev<sup>2</sup> de  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$  les produits scalaires suivants :

$$(u, v) \in \mathcal{H}^{grad}, \quad \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{grad}(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} u v + \alpha \text{grad } u \cdot \text{grad } v, \quad (1.13a)$$

$$(u, v) \in \mathcal{H}^{rot}, \quad \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{rot}(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} u \cdot v + \alpha \text{rot } u \cdot \text{rot } v, \quad (1.13b)$$

$$(u, v) \in \mathcal{H}^{div}, \quad \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^{div}(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} u \cdot v + \alpha \text{div } u \text{div } v. \quad (1.13c)$$

La constante  $\alpha$  (appelée constant de Sobolev) permet de pondérer les termes de dérivées spatiales. Ces produits sont généralement utilisés avec  $\alpha = 1$ <sup>3</sup> pour des éléments nodaux, d'arêtes et de faces. Tout comme pour la projection  $\mathcal{L}^2$ , la dérivée par rapport au  $i^{\text{ème}}$  DdL donne l'équation de minimisation de la distance. Le système  $[M][D_c] = [F]$  est à résoudre et les termes des matrices valent (dans le cas  $\mathcal{H}^{grad}$ ) :

$$M_{ij} = \int_{\{\mathcal{K}_{ij}\}} w_i w_j + \alpha \text{grad } w_i \cdot \text{grad } w_j, \quad (1.14a)$$

$$F_i = \int_{\{\mathcal{K}_i\}} w_i u_s + \alpha \text{grad } w_i \cdot \text{grad } u_s. \quad (1.14b)$$

---

2. On fera indifféremment référence à l'une de ces normes par  $\mathcal{H}^X$ .

3. Dans le cas  $\alpha = 1$ , les produits scalaires ainsi définis sont les produits usuels de  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$ . Sauf indication contraire, cette constante sera toujours considérée comme égale à 1.

**Évaluation de l'erreur** JIAO et HEATH (2004) donnent une borne de l'erreur en  $O(\sqrt{\alpha}h_c + h_c^2 + h_s^2)$  pour les éléments nodaux.

**Avantages et inconvénients du produit de  $\mathcal{H}^X$**  L'avantage principal des normes de Sobolev pour les études multi-physiques est la possibilité de transférer un champ tout en gardant une bonne approximation de l'un des opérateurs différentiels. Une projection  $\mathcal{H}^{rot}$ , par exemple, permet de déterminer (sur le second maillage) les valeurs du potentiel vecteur magnétique  $A$  en prenant en compte la norme de la distance entre les inductions magnétiques associés à chacun des maillages. Si une précision accrue de la valeur des potentiels n'est que peu intéressante (par exemple : la projection  $\mathcal{L}^2$  d'un potentiel), il est souvent crucial de conserver une bonne précision de la grandeur issue de l'opérateur différentiel associé. Les projections de type  $\mathcal{H}^X$  sont alors très utiles. De plus, la norme de Sobolev tend à lisser les solutions et permet d'éviter l'apparition de valeurs parasites éventuelles. Un exemple est donné en annexe F, on montre comment les oscillations locales parasites peuvent être lissées.

La méthode converge en revanche moins bien que celle impliquant le produit de  $\mathcal{L}^2$ . En particulier un effet d'échelle est dû à l'ajout du second terme du produit scalaire ( $\text{grad } u \cdot \text{grad } v, \dots$ ). La matrice formée par les produits d'opérateurs différentiels est singulière et devient prépondérante lorsque la taille caractéristique du maillage cible tend vers 0. Le problème de convergence peut être contourné en faisant varier  $\alpha$  avec  $h_c$ . Dans le cas du produit de  $\mathcal{H}^{grad}$  le choix de  $\alpha$  proportionnel à  $h_c^2$  permet de retrouver le même ordre de convergence que dans le cas  $\mathcal{L}^2$ .

#### 1.3.4 Semi-normes en opérateurs différentiels

Nous avons également testé une troisième méthode basée sur les semi-normes des espaces  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$  :

$$(u) \in \mathcal{H}^{grad}, \quad |u|_{\mathcal{H}^{grad}(\mathcal{D})}^2 = \int_{\mathcal{D}} \text{grad}^2 u, \quad (1.15a)$$

$$(u) \in \mathcal{H}^{rot}, \quad |u|_{\mathcal{H}^{rot}(\mathcal{D})}^2 = \int_{\mathcal{D}} \text{rot}^2 u, \quad (1.15b)$$

$$(u) \in \mathcal{H}^{div}, \quad |u|_{\mathcal{H}^{div}(\mathcal{D})}^2 = \int_{\mathcal{D}} \text{div}^2 u. \quad (1.15c)$$



Ces semi-normes conduisent à des systèmes matriciels singuliers et ont généralement une convergence assez mauvaise. Elles demeurent cependant particulièrement utiles pour la projection de potentiels avec conservation  $\mathcal{L}^2$  du champ associé. À titre d'exemple, pour l'espace  $\mathcal{H}^{grad}$  les termes élémentaires des matrices sont :

$$M_{ij} = \int_{\{\mathcal{K}_{ij}\}} \text{grad } w_i \cdot \text{grad } w_j, \quad (1.16a)$$

$$F_i = \int_{\{\mathcal{K}_i\}} \text{grad } w_i \cdot \text{grad } u_s. \quad (1.16b)$$

## 1.4 Projection Conservative

La méthode de projection conservative cherche à conserver, élément par élément, la valeur de l'intégrale et de l'un des opérateurs différentiels. Une reconstruction globale est ensuite opérée par une somme des contributions pondérée par le volume de l'élément considéré. Si des éléments nodaux sont utilisés, une correction peut être appliquée afin de satisfaire le principe du maximum.

### 1.4.1 Cas des nœuds

#### *Étapes du calcul*

1. Pour chaque élément  $\mathcal{K}_i$  du maillage cible  $\mathcal{T}_c$ , calcul de :

$$u_i = \frac{\int_{\mathcal{K}_i} u_s}{|\mathcal{K}_j|}, \quad (1.17a)$$

$$\text{grad } u_i = \frac{\int_{\mathcal{K}_i} \text{grad } u_s}{|\mathcal{K}_j|}, \quad (1.17b)$$

où  $|\mathcal{K}_j|$  est le volume de l'élément  $\mathcal{K}_j$ .

2. Distribution aux nœuds de l'élément considéré. Soit  $x_j$  la position du  $j^{\text{ème}}$  nœud  $P_j$ , le DdL local  $q_{i_j}$  est calculé comme suit :

$$q_{i_j} = u_i + \text{grad } u_i (x_j - g_i), \quad (1.18)$$

où  $g_i$  est le barycentre de l'élément  $\mathcal{K}_i$ .

3. Correction *a posteriori* des valeurs pour satisfaire le principe du maximum sur chaque élément  $\mathcal{K}_i$  :

$$\min_{P \in \mathcal{K}_c} u_s(P) \leq u_t \leq \max_{P \in \mathcal{K}_c} u_s(P).$$

Le DdL local est alors corrigé par une constante  $C = \min C_i(x_i)$  :

$$q'_{ij} = q_{ij} + C_{ij} (u_{ij} - u_i). \quad (1.19)$$

Les  $C_{ij}$  sont successivement calculés pour les nœuds de l'élément courant  $\mathcal{K}_i$  :

$$C_{ij} = \begin{cases} \min \left( 1, \frac{\max u_s|_{\mathcal{K}_i}}{q_{ij} - u_i} \right) & \text{si } q_{ij} - u_i > 0, \\ \min \left( 1, \frac{\min u_s|_{\mathcal{K}_i}}{q_{ij} - u_i} \right) & \text{si } q_{ij} - u_i < 0, \\ 1 & \text{si } q_{ij} - u_i = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

4. Pour chaque nœud, le DdL global ( $d_i$ ) est premièrement donné par la somme des valeurs élémentaires  $q_{ij}$  pondérée par les volumes des éléments  $\mathcal{K}_j$  :

$$d_i = \frac{\sum_{\{\mathcal{K}_j\}} q_{ij} |\mathcal{K}_j|}{\sum_{\{\mathcal{K}_j\}} |\mathcal{K}_j|}, \quad (1.21)$$

où  $\{\mathcal{K}_j\}$  représente l'ensemble des éléments partageant le  $i^{\text{ème}}$  nœud et  $|\mathcal{K}_j|$  est le volume du  $j^{\text{ème}}$  élément.

### 1.4.2 Cas des arêtes et des faces

#### *Étapes du calcul*

1. Pour un élément donné  $\mathcal{K}_{c_i}$  du maillage cible  $\mathcal{T}_c$ , calcul de la matrice des DdL locaux  $S_{sj}$ . Dans le cas des arêtes :

$$S_{sj} = \int_{\mathcal{K}_i} u_s \cdot n_{d=j} \quad \text{pour } j = 1 \dots 3, \quad (1.22a)$$

$$= \int_{\mathcal{K}_i} \text{curl } u_s \cdot n_{d=j-3} \quad \text{pour } j = 4 \dots 6. \quad (1.22b)$$

$n_d$  représente les directions successives de l'espace. Si des éléments de faces sont considérés,  $\text{curl } u_s$  doit être remplacé par  $\text{div } u_s$ , et la matrice  $6 \times 6$  devient une matrice  $4 \times 4$ . Cette opération permet de déterminer l'ensemble des

DdL permettant d'obtenir, élément par élément, un champ pour lequel les intégrales sont égales (aspect localement conservatif).

2. Détermination de la matrice  $[Q]$  des DdL locaux de l'élément pour lesquels les intégrales sont satisfaites. Le système linéaire suivant est résolu :

$$[S_w][Q] = [S_s], \quad (1.23)$$

où  $[S_s]$  est le vecteur des intégrales de la fonction source sur l'élément  $w_i$ , et les valeurs de la matrice  $[S_w]$  sont les intégrales de chacune des fonctions de base sur cet élément. Ces intégrales, dans le cas des arêtes, sont définies par :

$$S_{w,j,k} = \int_{\mathcal{K}_i} w_k \cdot n_{d=j} \quad \text{pour } j = 1 \dots 3, \quad (1.24a)$$

$$= \int_{\mathcal{K}_i} \text{curl } w_k \cdot n_{d=j-3} \quad \text{pour } j = 4 \dots 6, \quad (1.24b)$$

3. Pour chaque élément fini considéré, le DdL global est donné par la somme des contributions des éléments auxquels il est associé, pondérée par le volume correspondant :

$$q_i = \frac{\sum_{\{\mathcal{K}_j\}} Q_j |\mathcal{K}_j|}{\sum_{\{\mathcal{K}_j\}} |\mathcal{K}_j|}. \quad (1.25)$$

$\{\mathcal{K}_j\}$  représente l'ensemble des éléments contenus dans le support du  $i^{\text{ème}}$  élément fini ( $i^{\text{ème}}$  arête,  $i^{\text{ème}}$  face, ...).  $|\mathcal{K}_j|$  est le volume du  $j^{\text{ème}}$  élément.

Bien que la méthode de projection conservative n'utilise que des valeurs locales, elle satisfait les propriétés d'une projection (conservation, minimisation de la distance CLEMENT 1975). Ses principaux atouts sont la conservation de l'intégrale de la fonction sur chaque tétraèdre cible et la vérification du principe du maximum. Plus précisément, la valeur totale de l'intégrale est conservée lors du transfert entre maillage (ce qui peut être utile par exemple pour conserver une puissance totale) et l'apparition de valeurs locales non physiques est évitée. La méthode conservative se situe donc comme un compromis entre bonne « interpolation » de la solution (voir méthode d'interpolation, paragraphe 1.2) et minimisation globale de l'erreur (voir projection orthogonale, paragraphe 1.3).

# Chapitre 2

## Comparaison des méthodes de transfert

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Précision de la transmission de champ . . . . .</b>	<b>164</b>
2.1.1	Méthode utilisée . . . . .	164
2.1.2	Éléments finis nodaux (éléments de Lagrange) . . . . .	168
2.1.3	Éléments finis d'arêtes (éléments de Nédélec) . . . . .	171
2.1.4	Éléments finis de faces (éléments de Raviart–Thomas) . . . . .	174
2.1.5	Éléments finis de volume . . . . .	176
2.1.6	Conclusion . . . . .	178
<b>2.2</b>	<b>Étude de convergence en finesse de maillage . . . . .</b>	<b>178</b>
2.2.1	Raffinement uniforme des deux maillages . . . . .	179
2.2.2	Variations simultanées des deux maillages . . . . .	182

---

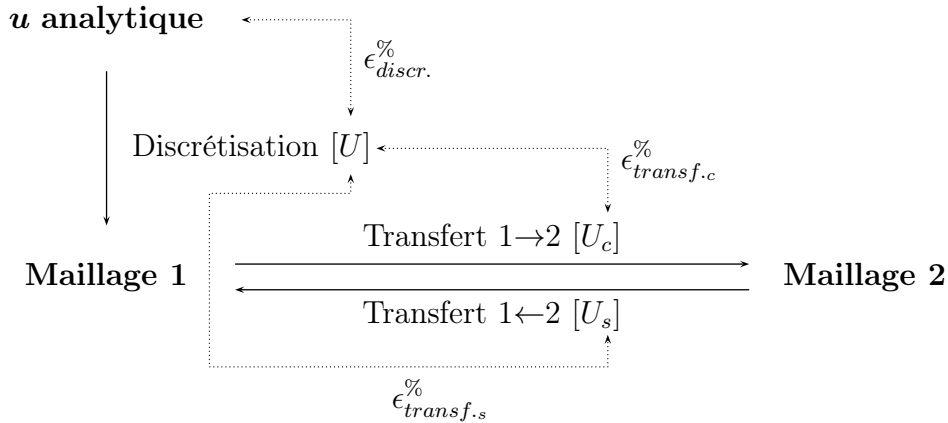
Indépendamment de la modélisation des phénomènes de couplages, nous avons réalisé différents tests de précision pour chacune des trois méthodes de transfert présentées au chapitre précédent (interpolation, projections conservative et orthogonale). Pour chaque type d'éléments finis (nœud, arête, face, volume), une fonction analytique est choisie et sert de référence pour la génération d'un champ discrétisé source. Cette opération permet de séparer l'erreur de discrétisation de l'erreur de transfert, tout en gardant le contrôle sur le profil du champ lui-même. Une première partie s'intéresse à l'aspect diffusif et conservatif des méthodes. On étudie pour cela des transferts itératifs de champs entre deux maillages. Une deuxième partie teste le comportement des méthodes en fonction de la finesse des maillages.

## 2.1 Précision de la transmission de champ

### 2.1.1 Méthode utilisée

#### Boucle de calcul

La précision sur la transmission de champ pour chacune des méthodes de transfert est évaluée au moyen d'une boucle de calcul présentée en figure 2.1.



**FIGURE 2.1** – *Détail de l'étape de discrétisation, du transfert direct et du transfert inverse.*

Le vecteur de référence  $[U]$  doit être comparé à la fonction analytique  $u$  tandis que les résultats des transferts  $[U_s]$  et  $[U_c]$  (respectivement vers les fonctions source et cible) sont à comparer au vecteur  $[U]$ . Afin de s'affranchir des erreurs de

discrétisation, le test est séparé en deux parties : une étape de discrétisation et des étapes de transfert.

### Étapes du calcul

1. L'étape de discrétisation permet de calculer un vecteur de DdL sources  $[U_a]$  par projection  $\mathcal{L}^2$  de la fonction analytique  $u_a$  sur le maillage :

$$[M][U_a] = [S], \quad (2.1)$$

où les termes élémentaires sont ainsi définis :

$$M_{i,j} = \int_{\mathcal{D}_p} w_i \cdot w_j, \quad (2.2a)$$

$$S_i = \int_{\mathcal{D}_p} w_i \cdot u_a. \quad (2.2b)$$

Le vecteur  $[U_a]$  initialise les valeurs de  $[U_s]$ , le vecteur des DdL du maillage 1.

2. L'étape de transfert détermine les valeurs de  $[U_c]$  de la solution  $u_c$  à partir de la donnée de  $[U_s]$  représentant la fonction  $u_s$ . Ce transfert est nommé « transfert direct »<sup>1</sup>. Lors des tests que nous avons effectués, le maillage 1 a été choisi plus fin que le maillage 2, les deux maillages n'ayant *a priori* aucun lien de parenté. Ce choix, arbitraire, est le cas le plus souvent rencontré dans la modélisation des systèmes multi-physiques.
3. Calcul de l'erreur entre la fonction  $u_c$  (donnée sur le second maillage) et la fonction discrétisée de référence  $u$  (donnée sur le premier maillage). Cette étape comporte donc une étape de localisation des valeurs de  $u_c$  sur le premier maillage.
4. Détermination des nouvelles valeurs de  $u_s$  par transfert inverse des valeurs de  $u_c$  sur le premier maillage.
5. Comparaison entre les valeurs de  $u_s$  et celles de  $u$ . Les deux fonctions discrètes appartiennent au même maillage.

50 paires de transfert ont été réalisées pour chacune des trois méthodes afin d'observer leurs comportements lors de transferts successifs. Les fonctions analytiques ont été choisies continues sur le domaine  $[0, 1]^3$  et à gradient, rotationnel

---

1. Dans le sens où ce transfert utilise les données analytiques à la première étape.

ou divergence non nul. Les expressions utilisées sont volontairement complexifiées pour éviter toute symétrie ou uniformité. La constante de Sobolev est arbitrairement fixée à 0, 1.

### Mesure de l'erreur

De par la discrétisation utilisée (partie I, chapitre 2), les fonctions appartiennent respectivement aux espaces  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$ . Ce sont des sous-espaces de  $\mathcal{L}^2$ , il est donc légitime de mesurer l'erreur de transfert en norme  $\mathcal{L}^2$  et en norme  $\mathcal{H}^x$ . Selon le produit scalaire utilisé, l'erreur optimale sera donnée par la norme adéquate. L'erreur relative globale sera calculée ainsi :

$$\epsilon_{\mathcal{X}_{glob}}^{\%} = \frac{\|u_p - u\|_{\mathcal{X}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}, \quad (2.3)$$

où  $\mathcal{X}$  représente un des espaces précédents.  $u$  est la fonction discrétisée de référence et  $u_p$  est la fonction projetée ( $u_s$  ou  $u_c$ ).

Selon les méthodes de transfert, le comportement local et le comportement global peuvent fortement varier. Une deuxième mesure de l'erreur est introduite pour mesurer la performance locale des différentes méthodes. La valeur maximale de l'intégrale de la norme du résidu est recherchée sur l'ensemble des éléments :

$$\epsilon_{\mathcal{L}_{elem}^2}^{\%} = \max_{\mathcal{K}_i \in \{\mathcal{K}\}} \left\{ \left( \frac{\int_{\mathcal{K}_i} (u_p - u)^2}{\int_{\mathcal{K}_i} u^2} \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.4)$$

avec les mêmes notations que précédemment, et où  $\{\mathcal{K}\}$  représente l'ensemble des éléments de  $\mathcal{D}_c$ . L'erreur locale est calculée de la même manière pour les espaces  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$ , seul change l'ajout du terme en grad · grad, rot · rot et div div dans les intégrales. Cette expression peut être problématique pour les éléments pour lesquels la fonction source est proche de zéro. Dans ce cas, on utilisera une expression faisant intervenir la valeur maximale du résidu :

$$x_i \text{ t.q. } \|u_p(x_i) - u(x_i)\| = \sup_{\mathcal{D}_p} \|u_p - u\|, \quad \epsilon_{\mathcal{L}_{loc}^2}^{\%} := \frac{\|u_p(x_i) - u(x_i)\|}{\|u(x_i)\|}, \quad (2.5)$$

numériquement évaluée à chaque point de Gauss des éléments de  $\mathcal{D}_p$ . Cette expression est particulièrement utile, à fonctions  $u_p$  et  $u$  données, pour déterminer l'erreur locale introduite par une méthode de projection.

L'aspect conservatif de chaque méthode est donné par la modification de la valeur sur  $\mathcal{D}_c$  de la norme de la fonction. On notera  $\epsilon_{consv.}^{\%}$  l'erreur relative ainsi calculée :

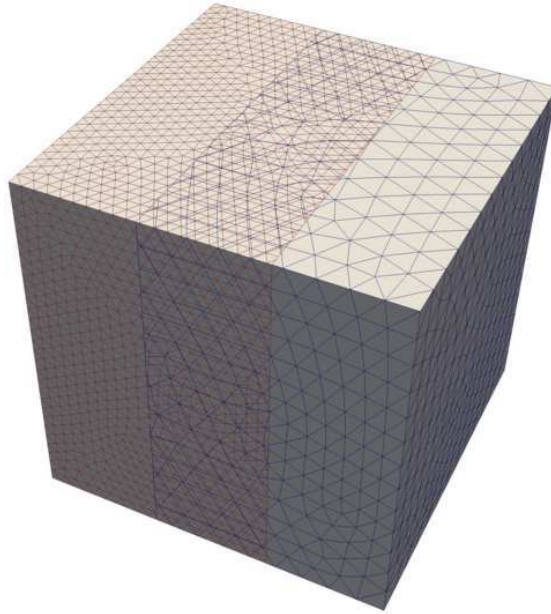
$$\epsilon_{consv.}^{\%} = \frac{|||u_p||_{\mathcal{X}} - ||u||_{\mathcal{X}}|}{||u||_{\mathcal{X}}}. \quad (2.6)$$

La valeur de  $\epsilon_{consv.}^{\%}$  est particulièrement importante si une grandeur globale doit être conservée lors du processus de couplage, par exemple une puissance, une énergie ou un déplacement.

La finesse des maillages est représentée par leur taille caractéristique. On note par  $h_s$  et  $h_c$  la longueur moyenne des arêtes des maillages source et cible, respectivement.

### Maillages

L'étude porte sur un cube d'arête de longueur unitaire supportant deux maillages différents (figure 2.2). Le premier maillage, représenté sur la partie gauche de la figure 2.2, se compose de 200 000 tétraèdres ( $h_s = 0,06$ ) et supporte des fonctions



**FIGURE 2.2** – Représentation schématique des deux maillages utilisés pour les tests de transferts. La fonction analytique est initialement discrétisée sur le maillage fin (à gauche) et transférée sur le maillage épars (à droite). La partie centrale de la figure montre la superposition des deux maillages.



de formes linéaires. Le second maillage, visible sur la partie droite de la figure 2.2, est constitué de 22 000 tétraèdres ( $h_c = 0,1$ ). Ce second maillage peut éventuellement supporter des fonctions de formes nodales quadratiques, les éléments d'arêtes et de faces restant linéaires.

### 2.1.2 Éléments finis nodaux (éléments de Lagrange)

Cette partie traite des transferts de fonctions discrétisées par des éléments nodaux. Pour la méthode d'interpolation, les DdL cibles sont les valeurs de la fonction source aux nœuds du second maillage. Pour la méthode de projection conservative, l'intégrale de la fonction et l'intégrale du gradient sont conservées élément par élément. La méthode orthogonale peut utiliser le produit scalaire de  $\mathcal{L}^2$  ou celui de  $\mathcal{H}^{grad} = \int u v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v$

La fonction analytique  $u_a$ , définie en coordonnées sphériques, est choisie pour son appartenance à l'espace continu  $\mathcal{H}^{grad}$  :

$$u_a = r^3 + r + 1, \quad (2.7a)$$

$$\text{grad } u_a = (3r^2 + 1)\mathbf{u}_r, \quad (2.7b)$$

où  $r$  est le rayon et  $\mathbf{u}_r$  est le vecteur unitaire radial.

Pour ce cas seulement, les tests seront séparés en deux sous-cas dépendants de la présence ou non de fonctions de formes quadratiques sur le second maillage.

#### Erreur de discrétisation nodale

Méthode	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{grad}$	
	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	0,130	0,124	1,079	0,104
Galerkin $\mathcal{L}^2$	0,029	0,001	1,001	0,012
Galerkin $\mathcal{H}^{grad}$	0,033	0,003	0,994	0,005

**TABLE 2.1 – Éléments finis nodaux** – Valeurs de  $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique (éléments linéaires).

L'erreur de discrétisation, pour les éléments linéaires, est présentée en table 2.1. Une première caractéristique commune aux méthodes de discrétisation apparaît :

la méthode d'interpolation, de part son aspect local, donne une erreur globale plus élevée que les méthodes de projection et tend à être moins conservative. Chacun des produits scalaires tend à diminuer l'erreur calculée avec la norme qu'il induit. En d'autres termes, l'erreur  $\mathcal{L}^2$  sera plus faible si une projection  $\mathcal{L}^2$  est utilisée plutôt qu'une projection  $\mathcal{H}^{grad}$ . De façon symétrique, l'erreur en norme  $\mathcal{H}^{grad}$  sera plus faible si une projection  $\mathcal{H}^{grad}$  est utilisée plutôt qu'une projection  $\mathcal{L}^2$ .

### Transferts entre maillages

Méthode	Maillage cible				Maillage source			
	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{grad}$		$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{grad}$	
	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	0,547	0,516	2,445	0,445	0,650	0,629	1,584	0,525
Conservative	0,223	0,026	2,565	0,179	0,204	0,027	1,866	0,193
Galerkin $\mathcal{L}^2$	0,126	0,001	2,280	0,034	0,105	0,001	1,772	0,037
Galerkin $\mathcal{H}^{grad}$	0,137	0,007	2,266	0,027	0,102	0,008	1,243	0,044

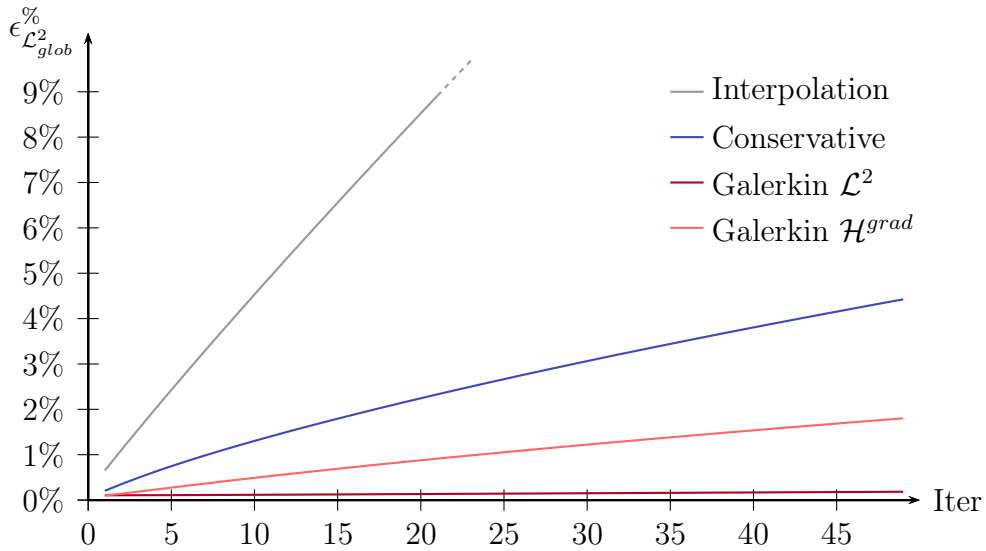
**TABLE 2.2 – Éléments finis nodaux** – Valeurs de  $\epsilon_{glob}^{\%}$  et  $\epsilon_{consv.}^{\%}$  pour des éléments cibles linéaires.

Le tableau 2.2 donne les résultats obtenus pour la première paire de transferts.  $\epsilon_{transf.c}^{\%}$  représente l'erreur commise lorsque la fonction de référence discrète est transférée sur le second maillage (cible). Le résultat de ce transfert, obtenu sur le second maillage, est de nouveau transféré au maillage source. L'erreur associée à ce second transfert est  $\epsilon_{transf.s}^{\%}$ . Pour un transfert unique, l'erreur en norme  $\mathcal{L}^2$  varie beaucoup selon les méthodes, en particulier l'erreur d'interpolation est très grande par rapport aux méthodes de projection orthogonale (Galerkin), la méthode conservative ayant une performance intermédiaire. L'erreur issue de la projection  $\mathcal{H}^{grad}$ , calculée sur le second maillage, est très légèrement inférieure à celle obtenue par projection  $\mathcal{L}^2$  ce qui est probablement dû à la stabilisation apportée par la méthode  $\mathcal{H}^{grad}$  (voir annexe F). Nous pouvons en revanche noter, et ce comme pour l'étape de discrétisation, que les projections orthogonales  $\mathcal{L}^2$  ou  $\mathcal{H}^{grad}$  tendent respectivement à diminuer la norme issue du produit scalaire associé. Dans cet exemple, la constante de Sobolev donne une importance faible au terme en  $\text{grad} \cdot \text{grad}$  par rapport au produit direct dans l'expression du produit scalaire. La norme  $\mathcal{H}^{grad}$  est améliorée sans trop dégrader la norme  $\mathcal{L}^2$ . Des tests complémentaires montrent

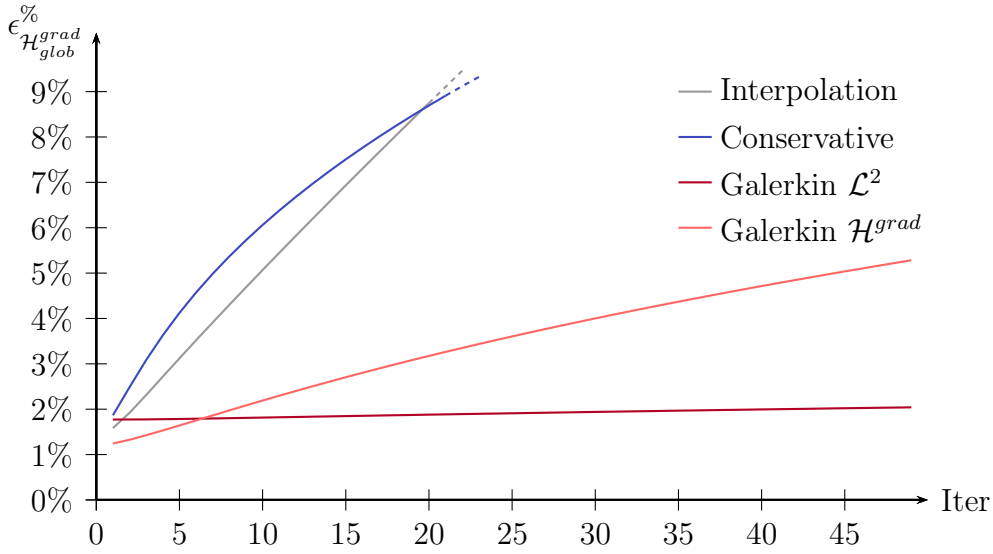
que plus la constante de Sobolev est grande, plus l'erreur  $\mathcal{L}^2$  est grande et plus la matrice de masse est mal conditionnée.

Il est important de remarquer que, pour les méthodes de projection, l'erreur globale (par rapport au vecteur de référence) diminue lorsque l'on repasse du maillage cible vers le maillage source ; ce comportement est typique de ces méthodes. Par contre, pour l'interpolation, l'erreur est strictement croissante à chaque étape : l'information est irrémédiablement perdue. Les valeurs de  $\epsilon_{consv.}^{\%}$  montrent que les méthodes de projection conservative et orthogonale (Galerkin) préservent l'intégrale de la fonction de façon précise. La méthode d'interpolation n'étant pas conservative au sens strict, la valeur de l'intégrale est rapidement modifiée de façon importante.

Le comportement des transferts nodaux est très particulier (figures 2.3 et 2.4) : la méthode d'interpolation est très diffusive, tandis que les projections  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^{grad}$  sont très conservatives. Ainsi, l'interpolation nodale apporte une erreur importante, même après quelques itérations. À l'opposée, la projection  $\mathcal{L}^2$  est très précise et quasi invariante au fil des projections successives. On note aussi que la projection  $\mathcal{H}^{grad}$  n'est intéressante (en norme  $\mathcal{H}^{grad}$ ) par rapport à la projection  $\mathcal{L}^2$  que pour quelques itérations seulement.



**FIGURE 2.3 – Éléments finis nodaux** – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$  pour des éléments cibles linéaires. Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{L}^2$ .



**FIGURE 2.4 – Éléments finis nodaux** – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{H}^{grad}_{glob}}^{\%}$  pour la projection orthogonale et des éléments cibles linéaires. Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{H}^{grad}$ .

### 2.1.3 Éléments finis d'arêtes (éléments de Nédélec)

Pour les éléments d'arêtes, la méthode d'interpolation consiste à calculer la circulation de la fonction source sur les différentes arêtes. La méthode conservative conserve l'intégrale de la fonction et l'intégrale du rotationnel. De par l'inclusion de  $\mathcal{H}^{rot}$  dans  $\mathcal{L}^2$ , le produit scalaire de  $\mathcal{L}^2$  et celui de  $\mathcal{H}^{rot}$  ( $\int u \cdot v + \alpha \text{rot } u \cdot \text{rot } v$ ) peuvent être utilisés. Une fonction continue à rotationnel non nul, exprimée en coordonnées sphériques, est utilisée :

$$u_a = \mathbf{u}_r + (r^3 + r) \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi, \quad (2.8a)$$

$$\text{curl } u_a = 2(r^2 + 1) \cos(\theta) \mathbf{u}_r - (4r^2 + 2) \sin(\theta) \mathbf{u}_\theta, \quad (2.8b)$$

avec  $\mathbf{u}_r$  le vecteur unitaire radial,  $\mathbf{u}_\phi$  le vecteur unitaire orthoradial et  $\mathbf{u}_\theta$  le vecteur unitaire azimuthal. Les termes en  $\mathbf{u}_r$  et le coefficient  $\sin(\theta)$  en facteur du terme en  $\mathbf{u}_\theta$  sont ajoutés pour éviter une singularité du rotationnel respectivement en  $r = 0$  et en  $\theta = 0$ .

#### Erreur de discrétisation

L'erreur de discrétisation de la fonction analytique par des éléments d'arêtes est donnée en table 2.3. On peut constater que la méthode d'interpolation d'arêtes

donne cette fois des résultats du même ordre de grandeur que les méthodes de projection. La projection de  $\mathcal{L}^2$  ne tenant pas compte du rotationnel du champ, l'erreur de discrétisation issue de la norme  $\mathcal{H}^{rot}$  est augmentée. La discrétisation  $\mathcal{H}^{rot}$  modifie fortement la norme  $\mathcal{L}^2$  du champ.

Méthode	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{rot}$	
	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	1,908	0,034	1,888	0,022
Galerkin $\mathcal{L}^2$	1,783	0,016	7,319	0,146
Galerkin $\mathcal{H}^{rot}$	1,835	0,006	1,820	0,017

**TABLE 2.3 – Éléments finis d'arêtes** – Valeurs de  $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique.

### Transferts entre maillages

Le détail des erreurs pour la première paire de transferts est donné tableau 2.4. Les différentes méthodes ont une performance équivalente vis-à-vis de la norme  $\mathcal{L}^2$ . Pour l'erreur en norme  $\mathcal{H}^{rot}$ , seules les méthodes d'interpolation et de projection  $\mathcal{H}^{rot}$  donnent des résultats acceptables, comme le montre le tracé de l'évolution des erreurs sur les figures 2.5 et 2.6.

Méthode	Maillage cible				Maillage source			
	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{rot}$		$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{rot}$	
	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	4,295	0,120	4,339	0,087	2,522	0,105	3,280	0,082
Conservative	4,089	0,075	7,263	0,337	2,360	0,129	13,154	0,086
Galerkin $\mathcal{L}^2$	4,032	0,081	9,236	0,398	2,389	0,134	16,916	0,413
Galerkin $\mathcal{H}^{rot}$	4,139	0,048	4,095	0,084	2,174	0,040	2,325	0,141

**TABLE 2.4 – Éléments finis d'arêtes** – Valeurs de  $\epsilon_{glob.}^{\%}$  et  $\epsilon_{consv.}^{\%}$ .

Il est important de remarquer que la méthode d'interpolation donne de bons résultats en norme  $\mathcal{L}^2$  et en norme  $\mathcal{H}^{rot}$ . Au regard de la simplicité de l'implémentation et de la vitesse d'exécution, le calcul des circulations d'arêtes est compétitif. Ce comportement est très différent de celui obtenu pour les éléments nodaux.

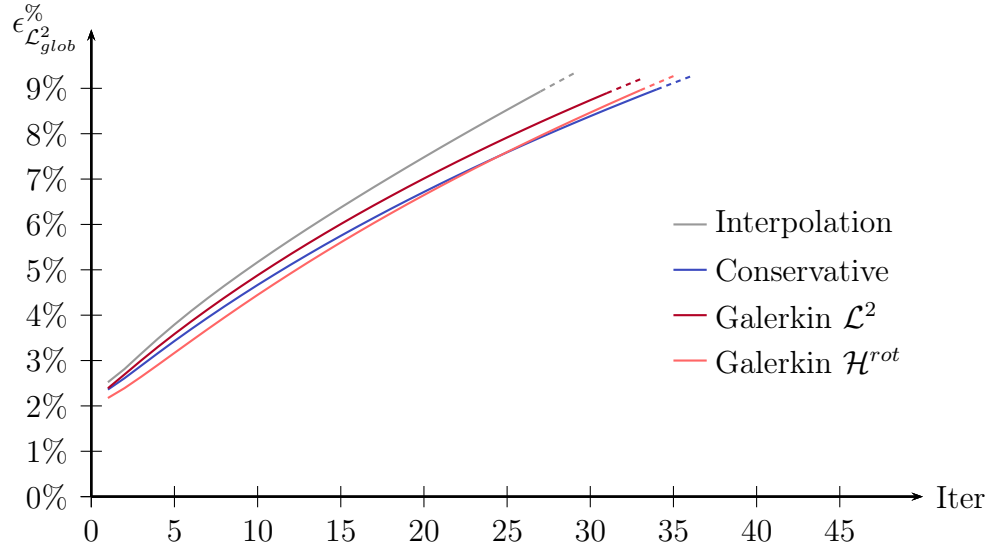


FIGURE 2.5 – *Éléments finis d'arêtes* – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{L}^2$ .

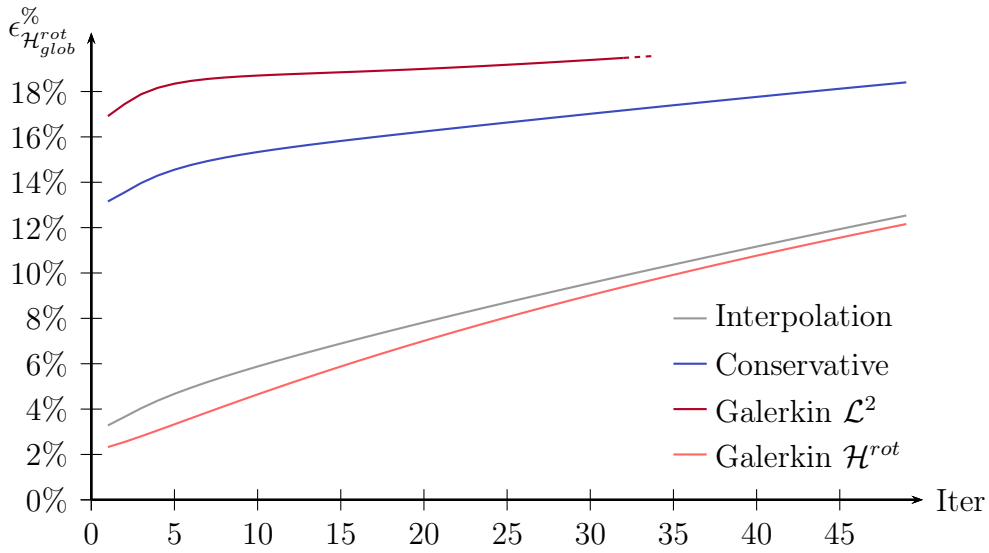


FIGURE 2.6 – *Éléments finis d'arêtes* – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{H}^{rot}_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{H}^{rot}$ .

### 2.1.4 Éléments finis de faces (éléments de Raviart–Thomas)

Les tests des méthodes de transfert pour les éléments de faces sont réalisés à partir de la fonction analytique suivante :

$$\mathbf{u}_a = (r^3 + r^2)\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\phi, \quad (2.9a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_a = (5r^2 + 4r). \quad (2.9b)$$

La méthode d'interpolation est basée sur le calcul des flux au travers des différentes faces. À l'image de ce qui est réalisé pour les éléments d'arêtes, la projection conservative consiste à déterminer les DdL locaux permettant de conserver l'intégrale de la fonction et sa divergence sur chaque élément.

#### Erreur de discrétisation

Les erreurs de discrétisation pour les méthodes d'interpolation et de projection orthogonale sont reportées dans la table 2.5. Les conclusions sont semblables à celles obtenues pour les éléments d'arêtes : les performances obtenues avec la méthode d'interpolation sont très bonnes considérant sa simplicité. La précision de la méthode entraîne aussi une bonne conservation de la norme.

Méthode	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{div}$	
	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	2,105	0,011	1,932	0,007
Galerkin $\mathcal{L}^2$	2,037	0,021	6,440	0,333
Galerkin $\mathcal{H}^{div}$	2,068	0,008	1,896	0,018

**TABLE 2.5 – Éléments finis de faces** – Valeurs de  $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique.

#### Transferts entre maillages

Tout comme pour l'étape de discrétisation, les transferts utilisant des éléments de faces ont un comportement similaire à ceux obtenus pour les éléments d'arêtes. En particulier, la méthode d'interpolation donne des résultats comparables aux méthodes de projection.

L'évolution de l'erreur pour les 50 transferts successives est présentée sur les figures 2.7 et 2.8. Le détail de la première itération est donné table 2.6.

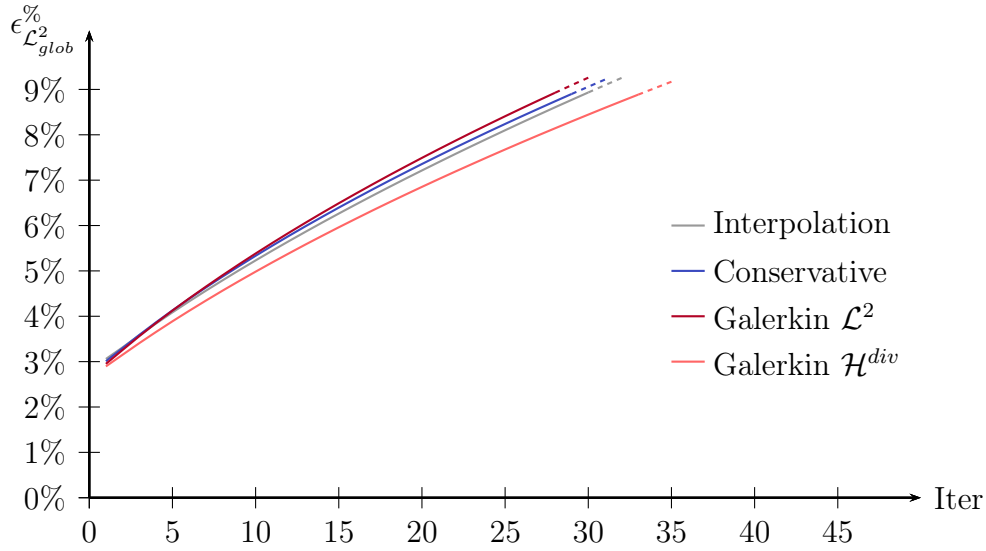


FIGURE 2.7 – *Éléments finis de faces* – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{L}^2$ .

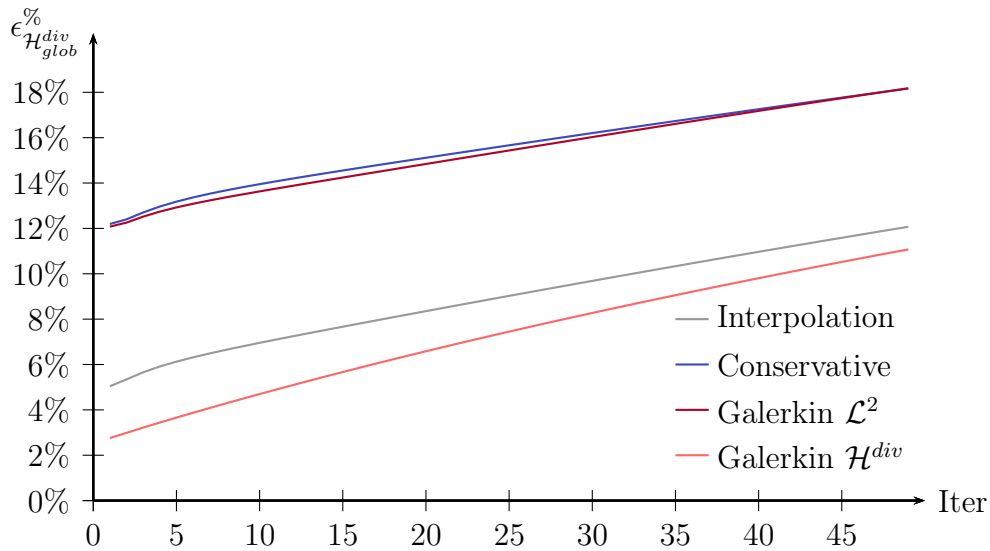


FIGURE 2.8 – *Éléments finis de faces* – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{H}^{div}_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{H}^{div}$ .



Méthode	Maillage cible				Maillage source			
	$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{div}$		$\mathcal{L}^2$		$\mathcal{H}^{div}$	
	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	4,646	0,021	4,727	0,012	3,059	0,008	5,042	0,014
Conservative	4,558	0,111	8,515	0,568	3,009	0,168	12,195	0,461
Galerkin $\mathcal{L}^2$	4,498	0,105	7,973	0,783	2,951	0,163	12,078	0,646
Galerkin $\mathcal{H}^{div}$	4,559	0,010	4,240	0,094	2,895	0,025	2,759	0,145

TABLE 2.6 – *Éléments finis de faces* – Valeurs de  $\epsilon_{glob.}^{\%}$  et  $\epsilon_{consv.}^{\%}$ .

### 2.1.5 Éléments finis de volume

Les éléments finis de volume sont définis par des fonctions constantes par élément. Il n'existe pas d'opérateur différentiel associé aux éléments de volume, en conséquence seules les méthodes basées sur le produit de  $\mathcal{L}^2$  sont utilisables. Les trois types de transferts reviennent à calculer l'intégrale de la fonction source sur un élément. Ainsi les résultats donnés par les trois méthodes sont identiques.

La méthode d'interpolation consiste à calculer l'intégrale de la fonction source sur chaque élément cible. Ce type d'éléments finis étant constant sur un élément et nul ailleurs, la matrice issue de la méthode de Galerkin est diagonale. La résolution du système linéaire est immédiate : pour chaque élément  $\mathcal{K}_i$  l'équation à résoudre est  $\int_{\mathcal{K}_i} w_{c_i}^2 d_{c_i} = \int_{calK_i} w_{c_i} u_s$ . La fonction  $w_{c_i}$  étant constante sur  $\mathcal{K}_i$ , égale à  $|\mathcal{K}_i|^{-1}$ , cette équation se réduit à :  $d_{c_i} = \int_{calK_i} u_s$ , qui n'est autre que la méthode d'interpolation. Il en est de même pour la projection conservative. Les valeurs pour les différentes méthodes sont reportées, permettant de vérifier leurs performances vis-à-vis des arrondis numériques.

### Erreur de discrétisation

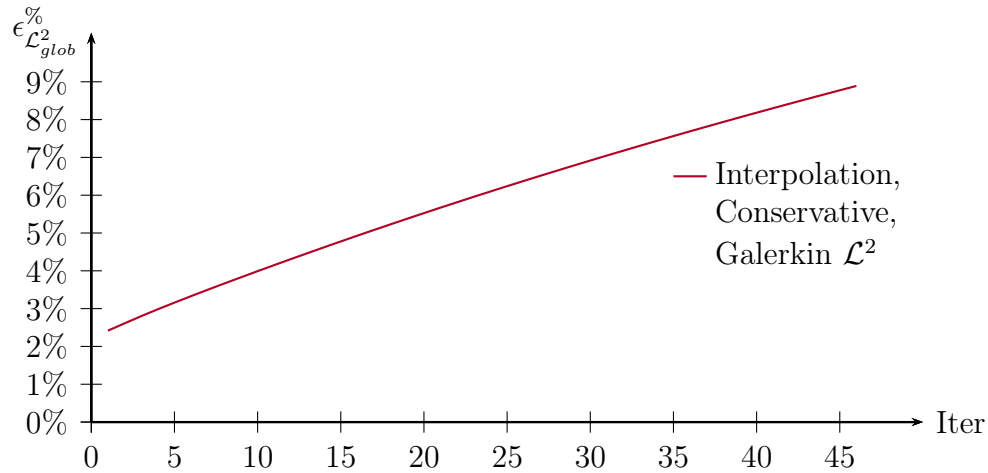
Les erreurs de discrétisation sont reportées en table 2.7, les résultats étant concordants pour les trois méthodes. Dans le cas des éléments de volumes, les trois méthodes conduisent à des calculs identiques. Il est donc normal d'obtenir trois valeurs égales pour les erreurs.

Méthode	$\mathcal{L}^2$	
	$\epsilon_{discr.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	1,609	0,013
Galerkin $\mathcal{L}^2$	1,609	0,013

**TABLE 2.7 – Éléments finis de volumes** – Valeurs de  $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique.

### Transferts entre maillages

L'évolution de l'erreur pour des transferts successifs est présentée sur la figure 2.9, le détail de la première itération est donné table 2.8.



**FIGURE 2.9 – Éléments finis de volumes** – Évolution de l'erreur  $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme  $\mathcal{L}^2$ .

Méthode	Maillage cible $\mathcal{L}^2$		Maillage source $\mathcal{L}^2$	
	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$	$\epsilon_{glob.}^{\%}$	$\epsilon_{consv.}^{\%}$
Interpolation	3,608	0,068	2,418	0,104
Conservative	3,608	0,068	2,418	0,104
Galerkin $\mathcal{L}^2$	3,608	0,068	2,418	0,104

**TABLE 2.8 – Éléments finis de volumes** – Valeurs de  $\epsilon_{glob.}^{\%}$  et  $\epsilon_{consv.}^{\%}$ .

### 2.1.6 Conclusion

Souvent synonyme de transferts entre maillages car utilisée la plupart du temps pour déterminer une fonction sur un maillage, l'interpolation de fonctions discrétisées par des éléments nodaux est peu précise comparée aux méthodes de projection. Lors du transfert, la fonction est fortement lissée et la norme de la fonction n'est pas conservée. À l'opposée, la projection orthogonale entre fonctions nodales est particulièrement efficace. Même lorsque les maillages sont très différents, cette méthode de transfert est particulièrement recommandée pour les méthodes multi-maillages.

Les méthodes à base d'éléments finis d'arêtes et celles à base d'éléments de facettes ont un comportement similaire. Ainsi les erreurs introduites par les méthodes de projection orthogonale (arêtes et faces), à maillage donné, sont beaucoup plus importantes que pour les méthodes nodales. La méthode d'interpolation, pour les éléments d'arêtes et de faces, produit des résultats comparables aux méthodes de projection tout en étant très simple à mettre en œuvre et rapide à calculer.

Les différents tests des méthodes ont été réalisés à partir de fonctions analytiques données. Le changement de fonctions de référence modifie les valeurs numériques des erreurs, mais sans influencer les performances relatives des méthodes les unes par rapport aux autres.

Les tests précédents utilisent le produit scalaire naturel de  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$  (c'est-à-dire  $\alpha = 1$ ). Cependant, la constante de Sobolev peut être choisie de manière à obtenir les meilleures performances. Les résultats de l'annexe F montrent que la valeur de la constante  $\alpha$  influe fortement sur la qualité des méthodes de projection orthogonales  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$ . Il faut aussi noter que les termes en grad, rot et div sont fortement dépendants de l'échelle du problème.

## 2.2 Étude de convergence en finesse de maillage

L'efficacité d'une méthode numérique peut aussi être donnée par sa rapidité de convergence en fonction de la finesse du maillage. Cette information est d'autant plus intéressante que deux maillages sont utilisés. D'après les caractéristiques d'interpolation des différents éléments finis (paragraphe 1.2) et d'après les résultats de projection  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^1$  (paragraphes 1.3.2 et 1.3.3) :

- l'erreur d'approximation nodale d'une fonction est en  $O(h^2)$ . Pour les élé-

ments d'arêtes et de faces, l'erreur est en  $O(h)$ . Dans le cadre d'un transfert de champ par interpolation, les erreurs pour les méthodes d'interpolation sont en  $O(h_s^2 + h_c^2)$  pour la méthode nodale et en  $O(h_s + h_c)$  pour les arêtes, faces et éléments ;

- pour la méthode de Galerkin, l'erreur nodale est en  $O(h_s^2 + h_c^2)$  en  $\mathcal{L}^2$ , et en  $O(\alpha h_c + h_s^2 + h_c^2)$ . Pour les méthodes d'arêtes et de faces, l'erreur est en  $O(h_s + h_c)$  pour tous les cas.

Ces bornes ne sont valables que pour des éléments linéaires. De façon plus générale, l'erreur d'approximation pour des éléments de Lagrange  $\mathbb{P}_k$  est en  $O(h^{k+1})$ . Ainsi pour des maillages supposant des fonctions de formes d'ordre plus élevé, les ordres sont  $O(h_s^{k_s+1} + h_c^{k_c+1})$  en  $\mathcal{L}^2$  et  $O(h_s^{k_s+1} + h_c^{k_c+1} + \alpha h_c^{k_c})$  en  $\mathcal{H}^{grad}$ . Les maillages source et cible portent des éléments respectivement d'ordre  $k_s$  et  $k_c$ . Dans le cadre de cette étude, seuls des éléments d'arêtes et de faces linéaires ont été considérés.

Pour les tests numériques qui suivent, les fonctions analytiques du paragraphe 2 sont utilisées. La constante de Sobolev est prise égale à 1, quelle que soit la finesse du maillage.

### 2.2.1 Raffinement uniforme des deux maillages

Le principal inconvénient des bornes définies précédemment est qu'elles font intervenir une somme dépendant de la caractéristique des deux maillages. Une étude de convergence faisant intervenir la variation d'un seul des deux maillages ne donne que peu d'informations car la contribution des deux maillages ne peut être discernée. Pour étudier la convergence globale de la méthode, il faut donc faire varier  $h_s$  et  $h_c$  de façon simultanée. Des maillages plus fins sont créés, à partir d'une paire de maillages, par subdivision successives des éléments en utilisant la technique de découpe présentée plus loin au paragraphe 4.2, figure 4.1. La table 2.9 présente les caractéristiques de chacun des maillages étudiés.

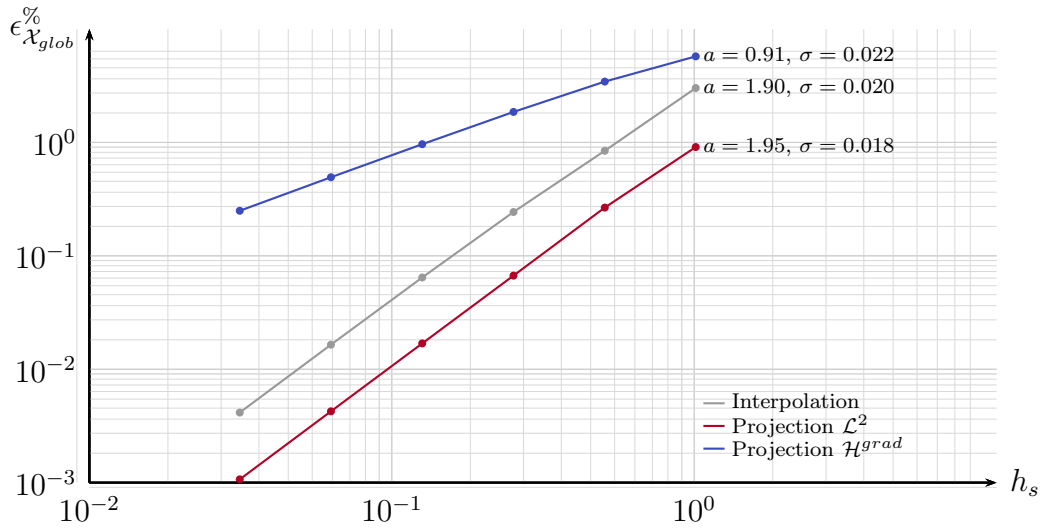
Pour chaque type d'élément, la norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur est tracée pour la méthode d'interpolation (courbe grise) et pour la méthode de projection orthogonale  $\mathcal{L}^2$  (courbe rouge). Pour les projections  $\mathcal{H}^{grad}$ ,  $\mathcal{H}^{rot}$  et  $\mathcal{H}^{div}$  (courbes bleues), l'erreur globale est calculée en utilisant la norme issue du produit scalaire utilisé. Les figures 2.10, 2.11, 2.12 et 2.13 présentent les résultats numériques des tests pour respectivement les nœuds, arêtes, faces et volumes. On ne teste dans ce cas qu'une seule projection d'un maillage source vers un maillage cible. Pour chaque courbe, le

	Maillage Source				Maillage Cible			
	Nœud	Arête	Faces	Éléments	Nœud	Arête	Faces	Éléments
0	45	168	206	82	21	66	74	28
1	213	1 036	1 480	656	87	382	74	224
2	1 249	7 168	11 168	5 248	469	2 548	520	1 792
3	8 417	53 088	86 656	41 984	3 017	18 504	3 872	14 336
4	61 505	408 128	682 496	335 872	21 521	140 816	29 824	114 688
5	469 633	3 199 616	5 416 960	2 686 976	162 337	1 098 272	233 984	917 504

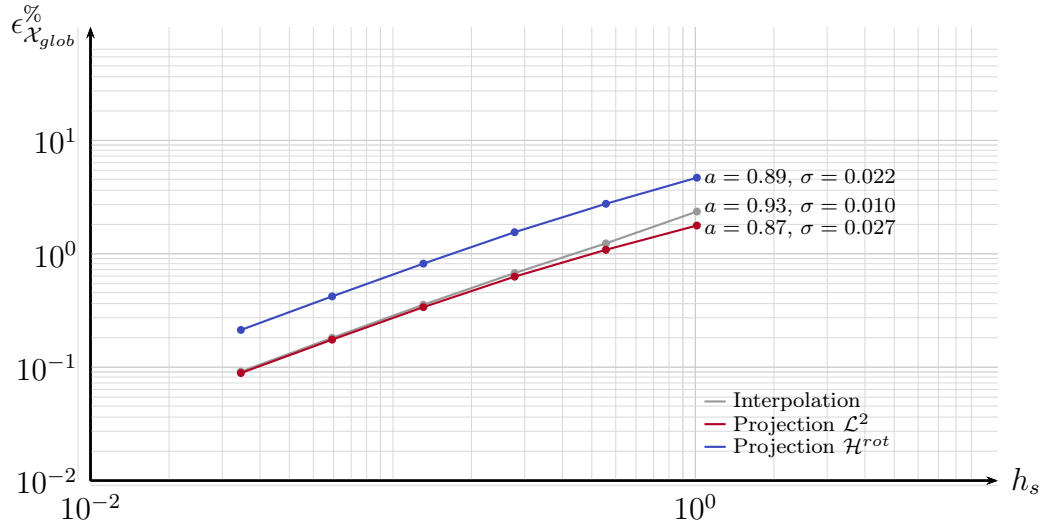
**TABLE 2.9** – *Caractéristiques des différents maillages issues de subdivisions successives des différents éléments en huit autres.*

paramètre  $a$  représente la pente et exprime donc l'ordre de convergence, en  $O(h^a)$ . La valeur  $\sigma$  est le résidu obtenu à partir de la méthode des moindres carrés avec l'adaptation d'une droite.

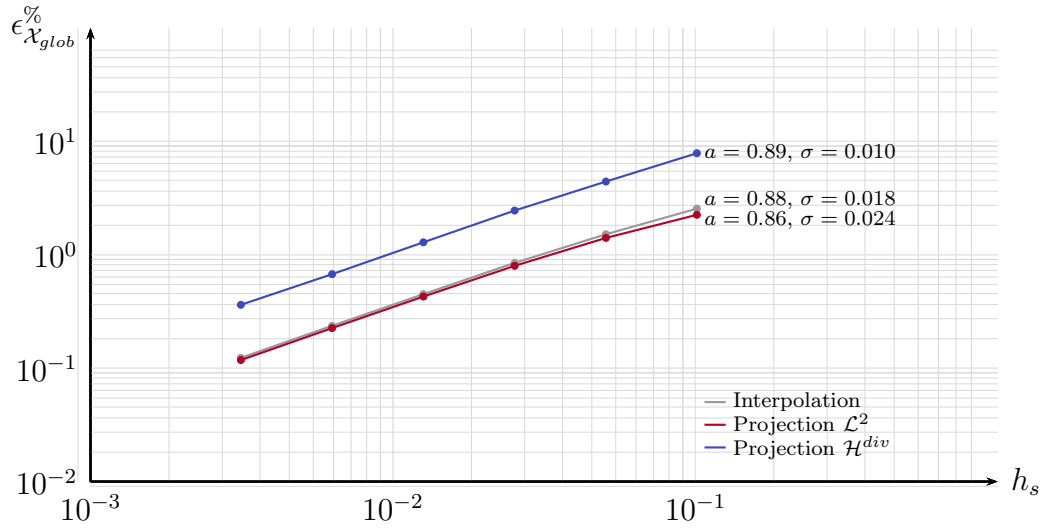
L'ordre de convergence est globalement respecté, cependant les différentes pentes sont légèrement inférieures aux attentes. Cela est probablement dû aux erreurs numériques, qui ont une importance relative plus conséquente pour les maillages fins.



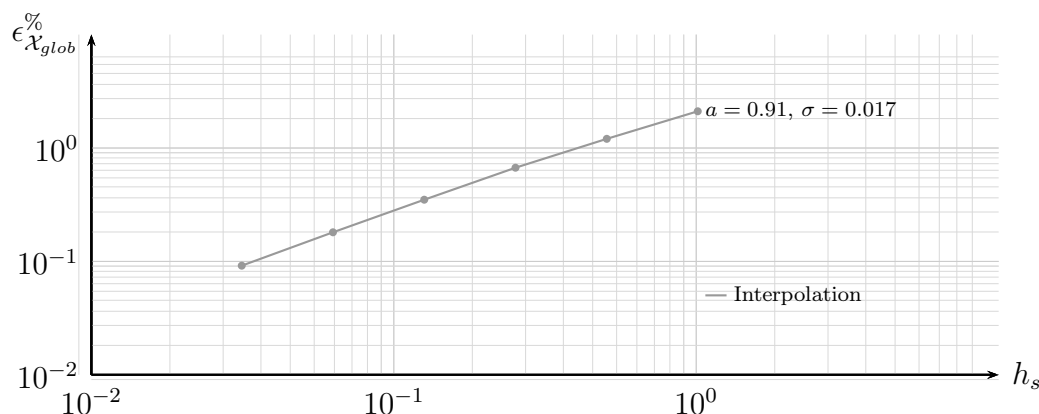
**FIGURE 2.10** – *Évolution de l'erreur pour des subdivisions successives des maillages source et cible. Cas des transferts nodaux.*



**FIGURE 2.11** – Évolution de l'erreur pour des subdivisions successives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments d'arêtes.



**FIGURE 2.12** – Évolution de l'erreur pour des subdivisions successives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments de faces.



**FIGURE 2.13** – Évolution de l’erreur pour des subdivisions successives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments de volumes.

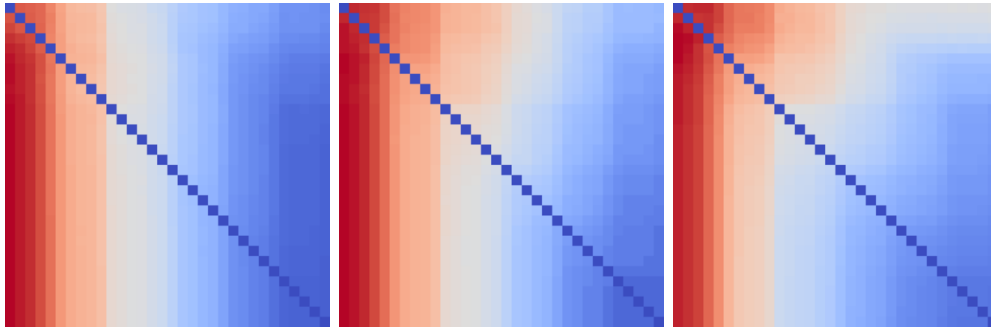
## 2.2.2 Variations simultanées des deux maillages

Un plan de tests sur un ensemble de maillages différents s’avère tout de même intéressant. 32 maillages de finesse différente, repartis le plus possible de façon linéaire en échelle logarithmique, ont été générés. L’objectif est de comparer la répartition de la carte d’erreurs pour les différentes méthodes. Une matrice pour laquelle chaque ligne (respectivement colonne) représente l’utilisation d’un maillage source (respectivement cible) différent est alors tracée. La table 2.10 présente les caractéristiques des différents maillages en terme de nombre d’éléments. Les valeurs ont été normalisées, en échelle logarithmique, entre 0 et 1.

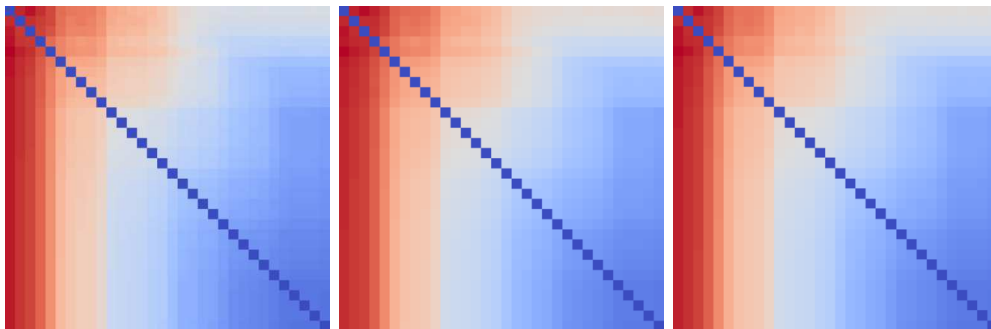
Éléments		Éléments		Éléments		Éléments	
1	143	2	175	3	218	4	363
5	785	6	1 805	7	3 191	8	3 799
9	4 169	10	6 380	11	19 198	12	22 490
13	26 134	14	30 504	15	44 066	16	54 823
17	100 814	18	178 933	19	218 378	20	346 076
21	437 396	22	780 757	23	1 460 093	24	1 914 108
25	2 738 799	26	3 507 067	27	6 371 718	28	11 861 297
29	13 903 269	30	14 015 141	31	15 291 833	32	21 971 006

**TABLE 2.10** – Nombre d’éléments pour chacun des différents maillages utilisés (numérotés de 1 à 32).

On constate notamment que, à l'image des résultats du paragraphe 2.1, les éléments nodaux se comportent différemment des éléments d'arêtes et de faces. En particulier, seule l'interpolation nodale dépend presque exclusivement du second maillage (répartition verticale des erreurs, figure 2.14). La projection  $\mathcal{L}^2$  nodale est aussi moins sensible à la taille caractéristique du maillage source. En revanche, pour toutes les autres méthodes, la carte d'erreur est quasi identique : on note que l'erreur tend globalement à augmenter lorsque le maillage source devient très lâche. À l'inverse, si la finesse du maillage source est suffisante, l'erreur dépend essentiellement du second maillage (figure 2.14, à droite projection  $\mathcal{H}^{grad}$ , et figures 2.15, 2.16 et 2.17).

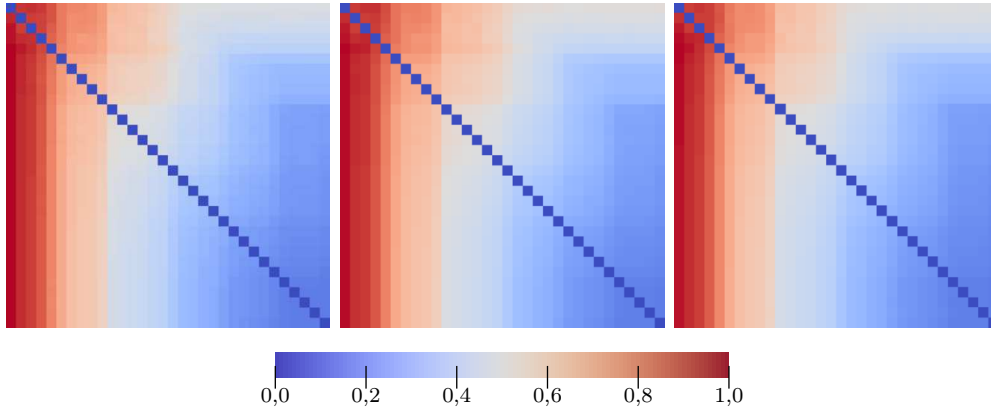


**FIGURE 2.14** – Erreur pour des transferts nodaux en fonction des maillages. Chaque terme matriciel  $M_{ij}$  représente l'erreur de projection nodale  $\epsilon_{glob.c}^{\%}$  du  $i^{\text{ème}}$  maillage vers le  $j^{\text{ème}}$  maillage. **De gauche à droite :** erreur d'interpolation, de projection  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^{grad}$ .

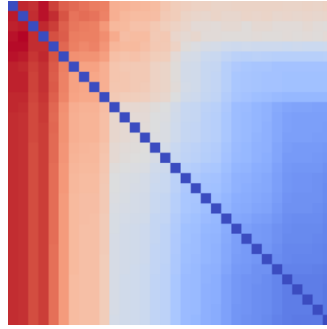


**FIGURE 2.15** – Erreur de transferts pour les éléments d'arêtes en fonction des maillages. **De gauche à droite :** erreur d'interpolation, de projection  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^{rot}$ .





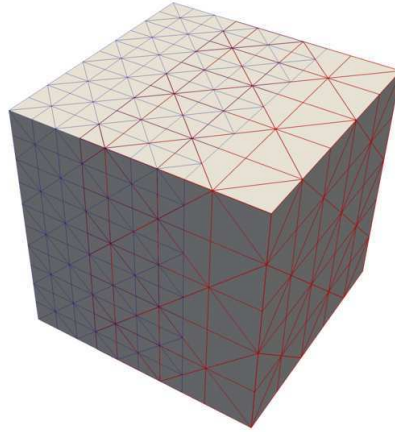
**FIGURE 2.16** – Erreur de transferts pour des éléments de faces en fonction des maillages. De gauche à droite : erreur d'interpolation, de projection  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^{div}$ .



**FIGURE 2.17** – Erreur pour des transferts d'éléments de volumes en fonction des maillages.

### Cas des maillages subdivisés

L'erreur de transfert peut en revanche dépendre de manière significative de l'agencement des maillages. En particulier, si les maillages  $\mathcal{T}_s$  et  $\mathcal{T}_j$  ont un lien de parenté en terme de subdivisions, alors un des espaces fonctionnels (notés par exemple  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}_s}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}_j}$ ) est inclus dans le second. Supposons que le maillage source soit une subdivision du maillage cible tel que présenté dans la figure 2.18. La table 2.11 présente les résultats de calculs pour le transfert nodal entre les deux maillages pour deux transferts directs et un transfert retour. Comme dans la figure 2.1,  $\epsilon_{glob.c}^{\%}$  représente l'erreur globale issue du vecteur projeté sur le maillage cible, comparée au vecteur de référence, et  $\epsilon_{glob.s}^{\%}$  représente l'erreur globale après un aller-retour.



**FIGURE 2.18** – Exemple schématique de maillage subdivisé. Maillage 1 en bleu et maillage 2 en rouge. Les deux maillages sont basés sur un cube d’arête unitaire. La superposition des maillages est présentée au centre de la figure.

Ainsi, d’après les résultats de la table 2.11, dans le cas  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , toute l’erreur est obtenue au premier transfert, car elle est initialement donnée sur le plus grand des deux espaces fonctionnels, et est projetée sur celui de plus petite dimension. À l’issue de ce transfert, la fonction appartient à l’espace fonctionnel commun et l’erreur n’évolue pas. De la même manière le cas  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  utilise une fonction de référence appartenant déjà aux deux espaces fonctionnels et pouvant par conséquent être parfaitement représentée sur chacun des deux maillages. L’erreur de transfert sera donc toujours nulle.

Ceci explique pourquoi la diagonale des matrices d’erreurs du paragraphe 2.2.2 est identiquement nulle : le transfert est réalisé entre deux maillages identiques, les espaces fonctionnels source et cible sont les mêmes.

Ordre	$\epsilon_{glob.c}^{\%}$	$\epsilon_{glob.s}^{\%}$	$\epsilon_{glob.c}^{\%}$
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	0,752	0,752	0,752
$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	0,000	0,000	0,000

**TABLE 2.11** – Valeurs de  $\epsilon_{glob.c}^{\%}$  et  $\epsilon_{glob.s}^{\%}$  pour des éléments nodaux dans le cas de maillages subdivisés.



# Chapitre 3

## Calcul des intersections entre maillages

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Localisation d'un point dans un maillage . . . . .</b>	<b>188</b>
3.1.1	Appartenance d'un point à un élément . . . . .	188
3.1.2	Recherche efficace d'éléments . . . . .	190
3.1.3	Conclusion . . . . .	194
<b>3.2</b>	<b>Calcul des intersections . . . . .</b>	<b>195</b>
3.2.1	Liste des points d'intersections . . . . .	195
3.2.2	Intersection face/face . . . . .	197
3.2.3	Reconstruction tétraédrique des intersections . . . . .	201
<b>3.3</b>	<b>Sensibilité par rapport aux tests de réels . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>3.4</b>	<b>Étude en coût de calcul . . . . .</b>	<b>204</b>

---

Toutes les méthodes de transferts précédentes nécessitent la localisation de points de Gauss du second maillage dans le premier. De plus, pour les méthodes de projections conservatives et orthogonales, la détermination précise des intégrales 1.7b, 1.17 ou 1.22 requiert la connaissance de la variation du produit entre la fonction source et une fonction de base cible. Les expressions individuelles de chacune des fonctions ne sont connues que pour chaque élément des deux maillages. Ainsi, le produit n'est calculable que pour chaque sous-domaine appartenant à un même élément source et cible : une intersection.

Les procédures de localisation d'un point dans un maillage et de calcul d'intersections doivent être implémentées avec soin car elle conditionnent à elles-seules la performance numérique des méthodes de transferts entre maillages.

Cette partie aborde, par ordre d'exécution effectif, les différents algorithmes utilisés pour le calcul d'intersections. On montrera comment déterminer l'élément hôte pour un point donné, puis comment calculer les intersections élémentaires créées par deux maillages superposés.

## 3.1 Localisation d'un point dans un maillage

Le problème consiste à trouver l'élément  $\mathcal{K}_{s_i}$  appartenant à  $\mathcal{T}_s$  contenant le point  $X$  de coordonnées  $x_i$ . La localisation de  $N$  points dans un maillage de dimension  $M$  par parcours des éléments est *a priori* d'une complexité en  $O(MN)$ . La mise en œuvre de cette méthode montre que la complexité réelle est inférieure à la valeur théorique, et est de l'ordre de  $O(M \log(N))$  (JIAO et HEATH 2004). Cependant cette technique n'est applicable que pour des maillages de petite taille. L'objectif de cette partie est d'élaborer une stratégie permettant de trouver l'élément avec un coût minimal.

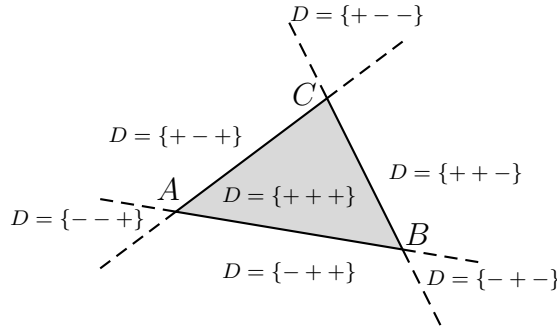
### 3.1.1 Appartenance d'un point à un élément

La première étape consiste à déterminer un critère permettant de connaître l'appartenance d'un point à un élément. Soit le déterminant noté  $\begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix}$ ,

défini par :

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

avec  $A_x—D_z$  les coordonnées cartésiennes des points  $A, B, C$  et  $D$ . La valeur de ce déterminant correspond à six fois le volume signé du tétraèdre  $(ABCD)$ , le signe donnant la position relative du point  $P$  par rapport au demi-plan défini par la facette orientée  $(ABC)$ . Cette information sur le signe permet ainsi de déterminer l'appartenance du point à l'élément. Pour une orientation des faces choisie judicieusement, si tous les déterminants sont positifs alors le point appartient à l'élément (figure 3.1).



**FIGURE 3.1** –  $D$  représente le signe des trois déterminants issus de deux faces du triangle  $ABC$  et du point local  $P$  :  $D = \{sign[ABP], sign[ACP], sign[BCP]\}$ . Si tous les déterminants sont positifs, alors le point  $P$  appartient au triangle.

Si les éléments sont tétraédriques, une orientation globale positive suffit pour obtenir des faces correctement orientées. Si les faces sont quadrangulaires, trois points sont arbitrairement choisis pour la détermination de l'orientation de la face, la procédure précédente ne peut alors plus être utilisée. L'algorithme 3.1 présente le détail de la procédure globale de localisation des points.

---

**ALGORITHME 3.1** – *Algorithme de localisation des points.*

---

**Données** : Une liste de points à localiser**Résultat** : Une liste d'indices d'éléments du maillage. Le  $i^{\text{ème}}$  indice représente l'index de l'élément qui contient le  $i^{\text{ème}}$  point

```

1 Orientations des éléments du maillage afin de pouvoir calculer le critère
  d'appartenance ;
2 pour chaque point  $P_i$  faire
3   Prédicat de  $K_0$ , initialisant l'indice de l'élément courant  $K_j$  ;
4   pour chaque face  $F_k$  de  $K_j$  faire
5     Calcul de  $[D_k] = [F_k, P_i]$  ;
6   fin
7   si tous les  $[D_k]$  sont positifs alors
8     Le point  $P_i$  appartient à l'élément courant, insertion de  $K_j$  à la  $i^{\text{ème}}$ 
      position du tableau de retour ;
9     Cycle et passage au point  $P_i$  suivant ;
10  sinon
11    Parmi les faces pour lesquelles  $[D_k]$  est négatif, choisir une face  $F_k$  pour
      laquelle l'élément voisin  $K_i$  n'appartient pas aux éléments précédemment
      visités ;
12     $K_j = K_i$ , retour en 4 ;
13  fin
14 fin

```

---

### 3.1.2 Recherche efficace d'éléments

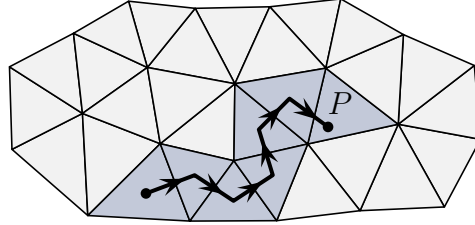
#### Déplacement dans un maillage

Il peut être intéressant de tirer parti des informations topologiques du maillage pour accélérer la recherche de l'élément hôte. Pour un élément donné, le point à localiser se trouve dans la direction de la face (ou des faces) pour laquelle (lesquelles) le déterminant est négatif.

Pour continuer la recherche, il est donc judicieux de prendre comme élément suivant un des éléments voisins partageant une face avec l'élément considéré et dont le déterminant est de signe négatif. Il reste cependant nécessaire de garder un historique des divers éléments parcourus pour éviter le test multiple de certains éléments, ainsi que pour éviter un échec de la recherche par tests circulaires. La recherche d'historique peut être plus coûteuse qu'une sélection aléatoire des voisins, mais a tout de même été choisie en raison de sa compatibilité avec la programmation parallèle. L'accès parallèle au générateur de nombres aléatoires entraînant par

contre des latences préjudiciables pour l'efficacité du programme.

La figure 3.2 donne un exemple de recherche directionnelle, le test d'appartenance n'est réalisé que pour les éléments grisés.



**FIGURE 3.2** – Recherche de l'élément contenant le point  $P$  : le trajet symbolise la liste des éléments successivement testés. Grâce à la recherche directionnelle, seuls les triangles grisés sont testés.

### Détermination des voisins

La rapidité de traitement des maillages non structurés dépend beaucoup de la façon dont sont construits les algorithmes et des informations disponibles sur chaque élément. On propose une technique permettant de générer efficacement la liste des arêtes ainsi que la connectivité avec les différents éléments. En particulier, pour la numérotation des faces, une classification par adressage direct est fortement consommatrice de mémoire. Une solution est d'utiliser une table de hachage avec collisions (CORMEN et al. 2009). Pour éviter un trop grand nombre de tests, des clés sont générées à partir de la somme des indices des nœuds. L'algorithme 3.2 est utilisé. On montre que, pour une répartition uniforme des clés (ce qui est le cas), le temps de recherche moyen est en  $O(1 + \alpha)$  où  $\alpha$  représente le rapport entre le nombre d'éléments à trier (nombre d'arêtes ou de faces) et le nombre maximal de clés possibles. En pratique  $\alpha$  est supérieur à 1.

Cette procédure est considérablement simplifiée dans le cas des faces puisque que la liste de connectivité  $S_{e/E}$  est, pour chaque entrée, limitée à deux éléments. Pour les arêtes, il faut définir une borne *a priori* pour limiter l'occupation de la mémoire. Cette limite peut toutefois être dépassée si le maillage est mal formé. Dès la découverte d'un nouveau sous-élément, il est alors intéressant de construire son orientation globale, et locale, car toutes les informations nécessaires sont alors disponibles. Il est aussi pratique d'ajouter à ce moment-là le sous-élément à la liste



---

**ALGORITHME 3.2** – *Création des listes de connectivités pour les arêtes et les faces.*


---

**Données** : Une liste d'éléments et de nœuds

**Résultat** : Une table de connectivité du type sous-élément/élément (face/élément ou arête/élément)

```

1  Création de la liste des sous-éléments dimensionnée pour le pire cas  $S_e$  ;
2  Création de la liste de connectivité sous-élément/élément  $S_{e/E}$  ;
3  Création de la liste des clés et des listes chaînées ( $K$  et  $N$ ) ;
4  Initialisation des tableaux à une valeur invalide. Compteur des sous-éléments  $i_{S_e}$  à
   1 ;
5  pour chaque Élément  $i_E$  du maillage faire
6      pour chaque Sous-élément  $i_{S_e}$  local faire
7          Calculer la clé  $k$  ;
8          Extraction du numéro du premier sous-élément/élément  $f = K(k)$ ;
9          si  $f$  est invalide alors
10             Un nouveau sous-élément est découvert, portant le numéro  $i_{S_e}$ . Ajout
               à la liste  $S_e$  ;
11             Ajout de l'élément  $i_E$  à la liste de connectivité  $S_{e/E}$  ;
12             Validation du premier sous-élément :  $K(k) = i_{S_e}$  ;
13             Mise à jour du compteur :  $i_{S_e} = i_{S_e} + 1$ 
14         sinon
15             si  $f$  désigne le sous-élément local alors
16                 Ajout de l'élément  $i_E$  à la liste de connectivité  $S_{e/E}$  ;
17                 Retour en 6 ou 5 ;
18             sinon
19                 Il faut parcourir la liste chaînée ;
20                 si le sous-élément suivant  $N(f)$  est invalide alors
21                     Un nouveau sous-élément est découvert, portant le numéro  $i_{S_e}$ .
                       Ajout à la liste  $S_e$  ;
22                     Ajout de l'élément  $i_E$  à la liste de connectivité  $S_{e/E}$  ;
23                     Validation du premier sous-élément :  $K(k) = i_{S_e}$  ;
24                     Mise à jour du compteur :  $i_{S_e} = i_{S_e} + 1$ 
25                 sinon
26                     Le parcours doit être poursuivi. On pose  $f = N(f)$  le nouveau
                       sous-élément à tester ;
27                     Retour en 15 ;
28                 fin
29             fin
30         fin
31     fin
32 fin
33 La recherche est complète, le nombre de sous-éléments est  $i_{S_e} - 1$  ;
34 Troncature des tables  $S_e$  et  $S_{e/E}$  au strict nécessaire ;

```

---

élément/sous-élément.

### Choix de l'élément initial

La durée de recherche est fortement influencée par le choix de l'élément initialisant la recherche. Plus l'élément est choisi proche de l'élément à trouver, plus le nombre de tests sera faible et par conséquent la recherche rapide. Il est donc particulièrement important de disposer d'un prédicat de l'indice de l'élément à trouver en fonction de la position du point. De plus, le coût en calcul du prédicat ne doit pas être très grand devant le coût d'un test d'appartenance.

Le prédicat repose sur la division de l'espace en blocs pour lesquels un élément appartenant à chaque bloc est déterminé. Il suffit par la suite de déterminer dans quel bloc le point  $P$  se situe, l'algorithme de recherche est ensuite initialisé par l'élément associé au bloc. La subdivision de l'espace est réalisée par une grille cartésienne de taille prédéfinie, cette méthode étant plus souple que la subdivision par octree par exemple.

La création de la subdivision spatiale et la première estimation de l'indice de l'élément peuvent cependant avoir un coût non nul en mémoire et en temps. Il faut donc trouver une taille optimale à la grille, par exemple la table 3.1 indique les temps de projections pour une grille de taille  $n \times n \times n$ . Le test est réalisé pour des maillages source et cible de 170 000 et 2 800 000 éléments respectivement, et une projection conservative nodale. Il faut également noter qu'une grille de  $500 \times 500 \times 500$  requiert plus de 3,8 gigaoctets de mémoire à stocker.

Taille $n$	1	2	3	5	10	20	30	50	100	200	300	500
Temps (s)	8	7	6	5	4	3	3	4	5	11	13	19

**TABLE 3.1** – *Temps de calcul en fonction de la taille de la grille cartésienne. Le test a été réalisé sur une machine ne possédant pas d'horloge monotone, la résolution en temps est donc la seconde.*

La taille de la grille peut être adaptée aux maillages utilisés. Il a été choisi de prendre une grille de  $10 \times 10 \times 10$  pour des maillages inférieurs au million d'éléments,  $20 \times 20 \times 20$  de 1 à 10 millions et  $50 \times 50 \times 50$  au delà de 10 millions d'éléments.

### Calcul du déterminant des matrices mineures

Dans ce qui précède, l'appartenance à un élément est très souvent testée. En particulier l'appartenance à un élément donné peut être testée à de multiples reprises. Il peut être intéressant de préparer ce calcul pour éviter des coûts supplémentaires. Développons le déterminant de l'équation 3.1 par rapport à la dernière colonne. Les déterminants suivant apparaissent :

$$\begin{aligned} [D_{14}] &= \begin{bmatrix} A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & [D_{24}] &= \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_z & B_z & C_z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [D_{34}] &= \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & [D_{44}] &= \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces déterminants de matrices mineures ne dépendent que du maillage et peuvent donc être calculés en amont de la recherche de points. Pour un point  $P = (P_x, O_z, P_z)$  donné, le déterminant global est donné par une relation plus simple :

$$\begin{bmatrix} A & B & C & P \end{bmatrix} = P_x [D_{14}] + P_y [D_{24}] + P_z [D_{34}] + [D_{44}], \quad (3.3)$$

évitant ainsi le calcul à de nombreuses reprises des déterminants  $D_{14}$  à  $D_{44}$ . Ceux-ci sont stockés, pour chaque élément, dans un tableau de taille  $3 \times F_{loc}$  où  $F_{loc}$  est le nombre de faces de l'élément courant. Cette opération entraîne une occupation mémoire supplémentaire qui s'avère peu pénalisante au regard du gain en temps de calcul permis par cette méthode.

### 3.1.3 Conclusion

L'algorithme global de localisation des points (algorithme 3.1) est partagé pour toutes les méthodes de transfert entre maillages. Dans le cas d'interpolation de champs, c'est le seul algorithme à utiliser et les points à localiser sont les points de Gauss des intégrales d'interpolation.

Il faut en revanche pouvoir déterminer les intersections pour calculer de manière correcte les intégrales du type 1.17, 1.22 ou 1.7b.

## 3.2 Calcul des intersections

L'objectif de cette section est de calculer le maillage issu de la division du maillage cible par le maillage source. Les intégrales seront alors calculées pour chacune des intersections, pour lesquelles une subdivision en éléments tétraédriques est nécessaire. Cette opération sera réalisée, élément par élément, au fil de l'assemblage des diverses matrices intervenant dans les méthodes de projections conservative et orthogonale. Cette opération est néanmoins coûteuse et nécessite de tester uniquement les éléments cibles recouvrant un élément source donné.

Pour les algorithmes qui suivent, de par la complexité des intersection entre pyramides et hexaèdres, nous supposons que les volumes non simpliciaux sont virtuellement subdivisés en tétraèdres. On se ramène alors uniquement à des intersections entre tétraèdres, plus simples à gérer.

### 3.2.1 Liste des points d'intersections

La première étape de calcul consiste à trouver les éléments recouvrant l'élément cible dont on veut calculer la contribution, ceci afin d'éviter un trop grand nombre de calculs d'intersections entre éléments. On utilisera pour cela une méthode dite par avance frontale : les éléments contenant les sommets de l'élément cible donné serviront d'initialisation, puis une recherche au travers des éléments voisins est réalisée. Ainsi, de proche en proche un nombre minimal d'éléments sera testé. Parallèlement, un calcul de la constellation de points définissant l'intersection est réalisé. Une description globale du processus est présentée dans l'algorithme 3.3.

La figure 3.3 représente l'ensemble des éléments testés pour un triangle donné (en pointillés). On constate qu'un nombre minimal d'éléments est testé (ceux représentés sur la figure), et que le traitement se fait par des fronts qui finissent par recouvrir l'élément.

---

**ALGORITHME 3.3** – *Algorithme permettant de déterminer les points d'intersection avec un coût minimal.*

---

**Données :** Une liste d'éléments  $\{K_i\}$  dont l'intersection doit être calculée

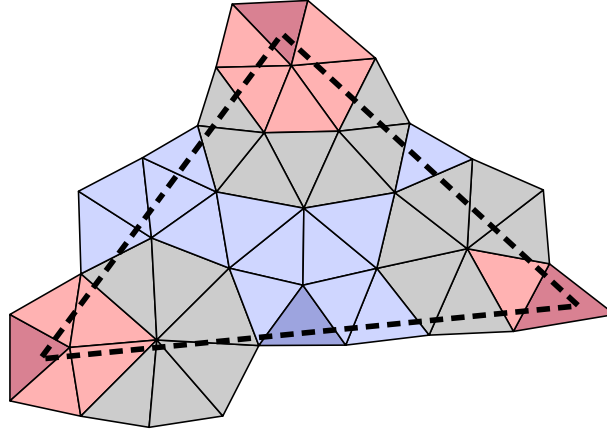
**Résultat :** Une liste de points d'intersection  $I_i$  pour chaque élément

```

1  Calcul des déterminants mineurs définis à l'équation 3.2 ;
2  Calcul des relations topologiques de voisinages entre éléments ;
3  pour chaque élément  $K_i$  de la liste  $\{K_i\}$  faire
4      Initialisation de la liste des éléments intersectés  $L$  par les éléments contenant
      les sommets de  $K_i$  ;
5      tant que  $L$  est non-vide faire
6          Prendre un élément  $K_{j_s}$  de  $L$  ;
7          pour chaque face de  $K_i$  et de  $K_{j_s}$  faire
8              Calcul de l'intersection éventuelle entre ces deux faces ;
9              si l'intersection est non-vide alors
10                 Ajout des points d'intersections à  $I_i$  si ceux-ci n'existent pas ;
11                 Ajout de l'élément voisin de  $K_{j_s}$  partageant la face testée ;
12             fin
13             si un sommet de  $K_{j_s}$  appartient à l'intersection avec  $K_i$  alors
14                 Ajout des éléments voisins de  $K_{j_s}$  partageant ce sommet ;
15             fin
16         fin
17         Le traitement de  $K_{j_s}$  est terminé :  $K_{j_s}$  est retiré de  $L$  et retour en 6 ;
18     fin
19     Le traitement de  $K_i$  est terminé : retour en 3 et passage à l'élément suivant ;
20 fin

```

---



**FIGURE 3.3** – Représentation de la méthode par avance frontale sur un cas 2D : les différents niveaux d'éléments testés sont repérés par couleurs. L'algorithme teste en premier les éléments rouge foncé, puis par ordre les éléments rouge clair, gris, bleu clair et enfin bleu foncé.

### 3.2.2 Intersection face/face

Toute la difficulté de l'algorithme précédent réside dans le calcul d'intersections entre faces. Cette opération est réalisée en utilisant de nouveau le déterminant défini à l'équation 3.1. Soient deux faces  $(ABC)$  et  $(PQR)$ , le signe de  $\begin{bmatrix} A & B & P & Q \end{bmatrix}$  donne des informations sur la nature de l'intersection entre  $(ABC)$  et  $(PQR)$ . Comme indiqué sur la figure 3.4, si  $\begin{bmatrix} A & B & P & Q \end{bmatrix}$  est négatif, alors le segment  $(AB)$  intersecte la face  $(PQR)$  sur le demi-plan contenant l'intérieur de  $(PQR)$ . Dans le cas contraire,  $(AB)$  intersecte le plan support de la face  $(PQR)$  en dehors de celle-ci.

L'algorithme comporte alors deux étapes : déterminer si les faces s'intersectent réellement (et réorganiser la liste des sommets) et calculer les points d'intersections. Sa structure est compliquée du fait que le nombre de tests à réaliser est élevé.

#### Méthode

Les algorithmes 3.4 et 3.5 détaillent les deux étapes de la méthode, la détermination de l'intersection se faisant en deux temps. On constate que le calcul des déterminants des matrices mineures est de nouveau utile.

---

**ALGORITHME 3.4** – *Calcul des intersections entre deux faces. Étape 1 : Détermination de l'intersection effective des faces avec le plan support opposé. Si nécessaire, préparation de l'étape 2.*

---

**Données** : Une face source  $(ABC)$  et une face cible  $(PQR)$

**Résultat** : Les points d'intersections éventuels

```

1   $(ABC)$  intersecte-t-elle le plan support de  $(PQR)$ ? Calcul de  $[APQR]$ ,  $[BPQR]$ 
   et  $[CPQR]$  ;
2  si les trois déterminants ont le même signe alors
3  | Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont du même côté du plan : il n'y a pas d'intersection,
   | fin du calcul ;
4  sinon
5  | Le point seul d'un côté du plan est isolé et est noté  $A_1$  ;
6  | Création de la face  $(A_1B_1C_1)$  ayant la même orientation par permutation
   | circulaire de  $(ABC)$  ;
7  | si  $[A_1PQR]$  est négatif alors
8  | | Échange de  $P$  et de  $Q$ , on assure la positivité du déterminant ;
9  | fin
10 fin

11  $(PQR)$  intersecte-t-elle le plan support de  $(ABC)$ ? Calcul de  $[PABC]$ ,  $[QABC]$ 
   et  $[RABC]$  ;
12 si les trois déterminants ont le même signe alors
13 | Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont du même côté du plan : il n'y a pas d'intersection,
   | fin du calcul ;
14 sinon
15 | Le point seul d'un côté du plan est isolé et est noté  $P_1$  ;
16 | Création de la face  $(P_1Q_1R_1)$  ayant la même orientation par permutation
   | circulaire de  $(PQR)$  ;
17 | si  $[P_1A_1B_1C_1]$  est négatif alors
18 | | Échange de  $B_1$  et de  $C_1$ , on assure la positivité du déterminant ;
19 | fin
20 fin

```

---

---

**ALGORITHME 3.5** – *Calcul des intersections entre deux faces. Étape 2 : Détermination des positions relatives et calcul effectif des points d'intersections.*

---

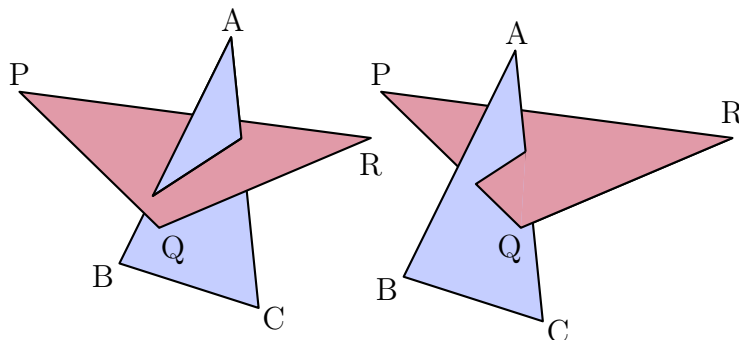
```

1  si  $[A_1B_1R_1P_1]$  est positif alors
2     $(A_1B_1)$  intersecte le plan de  $(PQR)$  côté extérieur à  $R_1P_1$  ;
3    si  $[A_1C_1R_1P_1]$  est positif alors
4      Les segments  $(A_1B_1)$  et  $(A_1C_1)$  sont extérieurs et du même côté de
       $(R_1P_1)$  : il n'y pas d'intersection, fin du calcul ;
5    sinon
6      si  $[A_1C_1Q_1P_1]$  est positif alors
7         $(A_1C_1)$  intersecte  $(PQR)$  côté intérieur par rapport à  $(Q_1P_1)$  ;
8        Les points d'intersections sont ceux de  $(A_1C_1)$  avec  $(PQR)$  et  $(P_1R_1)$ 
        avec  $(ABC)$  ;
9        Calcul des intersections, fin du calcul ;
10     sinon
11        $(A_1C_1)$  intersecte  $(PQR)$  côté extérieur par rapport à  $(Q_1P_1)$  ;
12       Les points d'intersections sont ceux de  $(P_1R_1)$  et  $(P_1Q_1)$  avec  $(ABC)$  ;
13       Calcul des intersections, fin du calcul ;
14     fin
15   fin
16  sinon
17     $(A_1B_1)$  intersecte le plan de  $(PQR)$  côté intérieur à  $R_1P_1$  ;
18    si  $[A_1B_1Q_1P_1]$  est négatif alors
19      Les segments  $(R_1P_1)$  et  $(Q_1P_1)$  sont extérieurs à  $(ABC)$  et du même côté
      de  $(A_1B_1)$  : il n'y pas d'intersection, fin du calcul ;
20    sinon
21      si  $[A_1C_1Q_1P_1]$  est négatif alors
22         $(A_1C_1)$  intersecte  $(PQR)$  côté extérieur par rapport à  $(Q_1P_1)$  ;
23        Les points d'intersections sont ceux de  $(A_1B_1)$  avec  $PQR$  et  $(Q_1P_1)$ 
        avec  $(ABC)$  ;
24        Calcul des intersections, fin du calcul ;
25      sinon
26         $(A_1C_1)$  intersecte  $(PQR)$  côté intérieur par rapport à  $(Q_1P_1)$  ;
27        Les points d'intersections sont ceux de  $(A_1B_1)$  et  $(A_1C_1)$  avec  $(PQR)$  ;
28        Calcul des intersections, fin du calcul ;
29      fin
30    fin
31  fin

```

---





**FIGURE 3.4** – Cas possibles selon le signe de  $[ABPQ]$ . *Gauche* :  $[ABPQ]$  négatif; *Droite* :  $[ABPQ]$  positif.

### Calcul des coordonnées du point d'intersection

Une fois que sont connus les segments intersectés par les différentes faces, le calcul de la position de l'intersection est nécessaire. Pour exemple, dans le cas où  $(AB)$  intersecte  $(PQR)$ , alors l'expression suivante est utilisée :

$$I = \alpha A + (1 - \alpha) B \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\begin{bmatrix} B & P & P & R \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} B & P & Q & R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & P & Q & R \end{bmatrix}}. \quad (3.4)$$

### Traitement des cas dégénérés

Il peut cependant arriver que les déterminants calculés lors des algorithmes 3.4 et 3.5 soient nuls. Cela signifie que des cas dégénérés sont présents :

- 1 élément nul signifie que l'un des sommets appartient au plan de l'une des faces ;
- 2 éléments nuls signifient qu'une arête appartient au plan de l'une des faces ;
- 3 éléments nuls signifient que les faces sont dans un même plan.

**Intersection point / face** Dans le cas où l'un des sommets appartient au plan de l'une des faces, la connaissance de la normale à la face est nécessaire. Supposons que le déterminant  $\begin{bmatrix} A & P & Q & R \end{bmatrix}$  soit nul. On définit  $n_{PQR} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ , alors le point  $A$  appartient à la face si et seulement si  $n_{PQR} \cdot n_{PQA} > 0$ ,  $n_{PQR} \cdot n_{QRA} > 0$  et  $n_{PQR} \cdot n_{RPA} > 0$ . Dans ce cas le point d'intersection à retourner est simplement  $A$ .

**Intersection arête / face** Si une arête d'une face est contenue dans le plan de la seconde, alors le calcul de l'intersection se déroule en deux étapes. Supposons  $\begin{bmatrix} A & P & Q & R \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} B & P & Q & R \end{bmatrix}$  nuls, alors le segment  $(AB)$  appartient au plan support de  $(PQR)$ . La première étape consiste à déterminer si un point appartient à la face grâce à l'intersection point / face. La deuxième étape consiste à calculer les différentes intersections entre les arêtes de  $(PQR)$  avec  $(AB)$ . Ainsi l'arête  $(AB)$  intersecte  $(PQ)$  si et seulement si  $n_{ABP} \cdot n_{ABQ} < 0$ , et  $n_{PQA} \cdot n_{PQB} < 0$ . Au final, les points d'intersections à retourner sont éventuellement  $A$  ou  $B$  si ceux-ci appartiennent à  $(PQR)$ , plus les différents points d'intersections entre  $(AB)$  et les arêtes de  $(PQR)$ . Les coordonnées sont alors calculées ainsi :

$$I = \alpha (B - A) + A \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{n_{PQR} \cdot n_{AQR}}{n_{PQR} \cdot n_{AQR} - n_{PQR} \cdot n_{BQR}}. \quad (3.5)$$

**Cas des faces appartenant à un même plan** Il faut dans ce cas traiter tous les cas issus de l'intersection arête / face précédente : la première étape consiste à déterminer si les sommets d'une face appartiennent à la seconde. Ensuite tous les intersections entres arêtes sont calculées. Les coordonnées des points à retourner sont ceux des sommets appartenant à une face et ceux des intersections arêtes / arêtes.

### 3.2.3 Reconstruction tétraédrique des intersections

À l'issue du calcul d'intersection, seule une constellation de points définissant la bordure extérieure de l'intersection est disponible. Afin de pouvoir calculer les intégrales 1.17, 1.22 ou 1.7b, une subdivision de cette intersection en volumes élémentaires doit être réalisée.

Nous avons l'opportunité de ne traiter que des intersections entre éléments tétraédriques, les volumes résultants sont de fait convexes. La liste de points générée par le calcul d'intersection définit par conséquent un volume de forme quelconque mais possédant cette propriété. On peut alors s'appuyer sur une propriété intéressante de la tétraédisation des convexes : « Soit  $\mathcal{T}$  la tétraédisation des  $N$  premiers points, alors tous les points restants sont extérieurs à (ou sur la frontière de)  $\mathcal{T}$  ». L'algorithme 3.6 peut alors être mis en œuvre, reposant sur le calcul de proche en proche des tétraèdres. Un exemple 2D simplifié est donné sur la figure 3.5.

---

**ALGORITHME 3.6** – Procédure permettant d'obtenir un pavage tétraédrique de l'intersection.

---

**Données** : Liste des points d'intersections  $L_{P_i}$

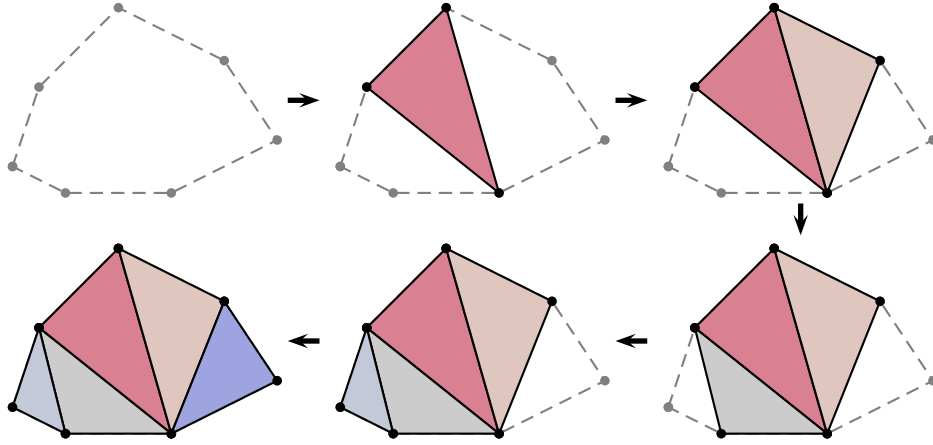
**Résultat** : Une liste d'éléments d'intersection  $L_{K_i}$

```

1 Initialiser la liste  $L_{K_i}$  à 0 ;
2 Initialiser  $L_f$ , la liste des faces externes du volume déjà maillé à 0 ;
3 Prendre  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les quatre premiers points de  $L_{P_i}$  ;
4 si  $[ABCD]$  est nul alors
5   si  $\text{Card}(L_{P_i}) = 4$  alors
6     | Aucun volume définissable, fin de l'algorithme ;
7   fin
8   Générer  $(A_1B_1C_1)$  la plus grande face possible à partir de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ;
9    $k = 5$ , choisir  $D_1$  comme le  $k^{\text{ème}}$  point de  $L_{P_i}$  :  $D_1 = L_{P_i}(k)$  ;
10  tant que  $[A_1B_1C_1D_1]$  est nul faire
11    |  $k = k + 1$  ;
12    | si  $k > \text{Card}(L_{P_i})$  alors
13      | | Aucun volume définissable, fin de l'algorithme ;
14    | fin
15    | Choisir  $D_1$  comme  $L_{P_i}(k)$  ;
16  fin
17  Orientation positive de  $(A_1B_1C_1D_1)$  ;
18   $(A_1B_1C_1D_1)$  est un tétraèdre valide, ajout à  $L_{K_i}$  ;
19  Ajout des faces de  $(A_1B_1C_1D_1)$  à  $L_f$  ;
20  pour chaque point  $P$  de  $L_{P_i}$  non utilisé faire
21    | pour chaque face  $F$  de  $L_f$  faire
22      | | Calcul de  $[F, P]$  ;
23      | | si  $[F, P]$  est négatif alors
24        | | | Soient  $F$ ,  $G$ ,  $H$  les points orientés de  $F$  ;
25        | | | Ajout du nouvel élément valide  $(GFHP)$  à  $L_{K_i}$  ;
26        | | | pour chaque face  $F_p$  de l'élément  $(GFHP)$  faire
27          | | | | si  $F_p$  appartient à  $L_f$  alors
28            | | | | | Retrait de  $F_p$  de la liste  $L_f$  ;
29          | | | | sinon
30            | | | | | Ajout de  $F_p$  à la liste  $L_f$  ;
31          | | | | fin
32        | | | fin
33      | | fin
34    | fin
35  fin
36 fin

```

---

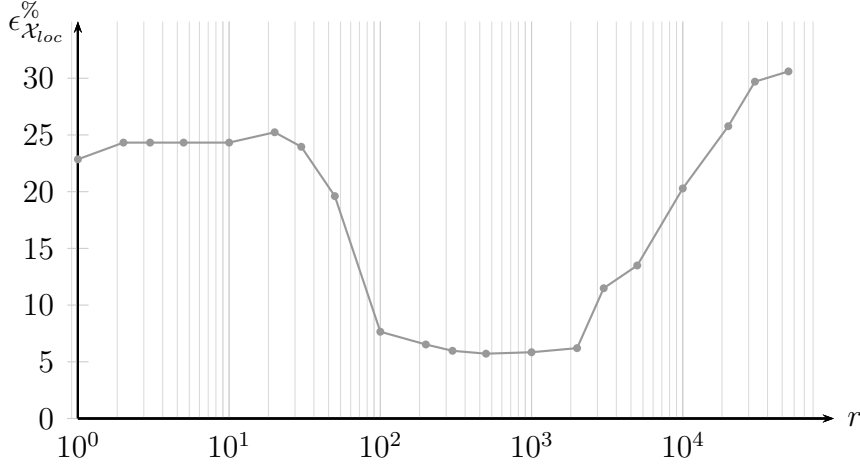


**FIGURE 3.5** – *Tétraédisation d’une intersection convexe délimitée par un nuage de points.*

À la suite de cette exécution d’algorithme, un pavage tétraédrique de l’intersection est connu. Pour cette intersection, les indices des tétraèdres cible et source sont déterminés, ainsi donc que l’ordre de la fonction issue du produit  $w_{t_i} u_s$  (produit entre la fonction source et une fonction de base de la discrétisation cible). Une quadrature peut être utilisée sur chaque tétraèdre élémentaire, afin d’intégrer de façon exacte le produit précédent sur le domaine de l’intersection. L’intégrale totale est par la suite calculée par somme sur les diverses intersections générées par l’élément cible choisi.

### 3.3 Sensibilité par rapport aux tests de réels

Le calcul exact d’intersection reste sensible à la limite  $\delta_0$  choisie pour discriminer les déterminants nuls. Si cette valeur est trop grande, alors le programme a tendance à « coller » d’éventuelles intersections de faible taille. Dans le cas contraire des intersections de formes très étirées peuvent être créées, nuisibles à la précision numérique. La figure 3.6 donne la valeur de l’erreur locale en fonction de  $r\epsilon$  où ici  $\epsilon$  représente l’épsilon machine et  $r$  un coefficient réel. Dans la plupart des cas, une valeur de  $500\epsilon$  donne de bons résultats.



**FIGURE 3.6** – Évolution de la norme de l'erreur locale en fonction du critère de nullité  $r\epsilon$  où  $r$  est un facteur réel et  $\epsilon$  est l'epsilon machine.

### 3.4 Étude en coût de calcul

Le transfert de solution entre maillages fait appel à différentes étapes telles que la localisation de points dans un maillage, l'assemblage de matrices creuses, et la résolution de systèmes linéaires. Chacune de ces méthodes a un coût variable selon la dimension de chacun des maillages utilisés. On dénote par  $M$  le nombre d'éléments du maillage source et par  $N$  celui du maillage cible.

Pour la recherche de point, une méthode naïve entraîne une recherche dans le pire des cas en  $O(M \times N)$ , se réduisant en pratique à  $O(N \times \log(N))$ . L'utilisation d'une estimation et d'une recherche directive permet d'obtenir un algorithme de complexité  $O(M + N)$ , ce qui donne directement la complexité de la méthode d'interpolation, avec une constante dépendant directement du nombre de points de Gauss utilisés et, selon les éléments finis utilisés, du rapport entre le nombre de faces ou d'arêtes et celui du nombre d'éléments.

Le calcul exact d'intersections tend à être en  $O(M + N)$  (JIAO et HEATH 2004), mais reste fortement dépendant de la position relative des mailles. Le stockage de la matrice de masse au format CSR occupe une place de  $2N_{NZ} + M + 1$ , avec un nombre de termes non nuls ( $NNZ$ ) classiquement en  $O(N)$  pour des maillages homogènes. L'espace mémoire utilisé est donc en  $O(N)$  pour le système linéaire. C'est aussi le cas pour l'espace mémoire occupé par la méthode d'interpolation où seuls les DdL du second maillage sont à stocker.

Pour les projections (problème elliptique), le gradient conjugué utilisé donne une complexité en  $O(N^{4/3})$  (HEATH 1996). Cette analyse ne tient pas compte de l'espace nécessaire au stockage des différents maillages, ni de la complexité algorithmique des constructions des arêtes et des faces (complexité en  $O(M)$  et  $O(N)$  pour respectivement chaque maillage). La table 3.2 résume la complexité des différentes étapes.

Étape	Complexité
Construction Arêtes / Faces	$O(M), O(N)$
Localisation des nœuds	$O(M + N)$
Interpolation globale	$O(M + N)$
Calcul des intersections	$O(M + N)$
Stockage du système matriciel	$O(N)$
Résolution par gradient conjugué	$O(N^{4/3})$

**TABLE 3.2** – *Complexité comparée des différentes étapes pour le transfert de solutions.  $M$  et  $N$  représentent respectivement la taille des maillages cible et source.*



# Chapitre 4

## Méthodes sans calcul des intersections

### Sommaire

---

4.1	Quadratures fixes . . . . .	208
4.2	Intégration adaptative . . . . .	208
4.2.1	Principe . . . . .	208
4.2.2	Résultat numérique . . . . .	210
4.3	Parallélisation . . . . .	213
4.4	Conclusion . . . . .	213

---



Le calcul explicite des intersections peut se révéler être l'étape la plus longue lors de la projection d'un champ d'un maillage vers un autre. La détermination exacte de l'ordre du polynôme issu du produit entre une fonction de base cible et la fonction source est l'unique raison pour laquelle ce calcul est effectué. Une autre approche consiste à ne pas déterminer cet ordre, à n'en réaliser qu'une simple estimation, puis à adapter la quadrature numérique aux variations effectives de la fonction source dans un élément.

## 4.1 Quadratures fixes

Cette première méthode consiste à estimer l'ordre maximal du polynôme approximant « correctement » la fonction  $u_s$  pour l'ensemble des éléments. Cependant l'intégration ne sera précise que si la quadrature est d'ordre suffisant par rapport aux variations de la fonction. La manière dont les maillages se superposent étant *a priori* inconnue (et par conséquent la manière dont évolue la fonction source dans l'élément cible l'est aussi), l'utilisation d'une quadrature d'une grande précision est alors souhaitable. La librairie CUBPACK fournit des quadratures de Newton–Cotes et des quadratures de Keast allant jusqu'à l'ordre polynomial 8 (GENZ et Ronald COOLS 1997 ; R. COOLS et HAEGEMANS 2003).

L'erreur d'intégration n'est cependant pas maîtrisée et se révèle être l'inconvénient majeur de la méthode. Il faut en outre adapter la quadrature pour le cas le plus défavorable, ce qui peut conduire à un surcoût important de calcul. La table 4.1 donne l'évolution de l'erreur en fonction de la quadrature utilisée pour la projection de la fonction nodale sinus cardinal  $u_a = \text{sinc}(2\pi r)$  en utilisant les maillages du chapitre 2. L'erreur de projection diminue avec l'augmentation de la précision de la quadrature numérique. Les quadratures d'ordre très élevés tendent à accumuler les erreurs et finissent par dégrader la précision.

## 4.2 Intégration adaptative

### 4.2.1 Principe

Afin de palier au problème d'adaptation de la quadrature, il est possible d'utiliser un algorithme d'adaptation automatique (NICOLET et al. 1992 ; DONCKER

Nb. points Gauss	1	4	5	10	11	14	15
Erreur (%)	3,757	2,528	2,533	2,526	2,527	2,526	2,526
Nb. points Gauss	20	24	31	35	45	56	84
Erreur (%)	2,528	2,525	2,525	2,541	2,525	2,532	2,550

**TABLE 4.1** – *Évolution de l'erreur en fonction du nombre de points de Gauss utilisés pour la quadrature.*

et al. 1996 ; DHIA et RATEAU 2005) qui se charge de calculer l'intégrale de manière précise sans connaissance *a priori* de la variation de la fonction au sein d'un élément. Le principe est de calculer la valeur de l'intégrale à partir de deux quadratures données, si l'erreur relative entre ces deux intégrales est supérieure à un critère donné alors la précision de la quadrature est augmentée jusqu'à convergence. Deux stratégies majeures sont possibles pour augmenter la précision de la quadrature (McFEE 1997) :

- utiliser un ensemble de quadratures pré-calculées de précision croissante (adaptation- $p$ ) ;
- découper géométriquement l'élément et traiter récursivement tous les domaines (adaptation- $h$ ).

Cette deuxième méthode a l'avantage d'être, en théorie, de précision infinie et permet d'éviter d'implémenter un jeu conséquent de quadratures. De plus, la répartition finale des points de Gauss est adaptée aux variations effectives de  $u_s$  dans l'élément, tandis que l'utilisation de quadratures de plus en plus précises tend à densifier de façon uniforme la répartition. L'algorithme retenu est un mélange de ces deux méthodes puisque le critère de convergence est calculé à partir de deux quadratures d'ordre successif, tandis que l'adaptation est réalisée par subdivision (McFEE 1997).

L'algorithme 4.1 présente la procédure globale de découpe virtuelle, et la figure 4.1 donne un aperçu de la manière dont sont successivement découpés les éléments. Les segments sont découpés en deux tandis que les faces sont divisées en 4 faces homothétiques. Les quadrangles et hexaèdres sont tous homothétiques alors que la découpe des tétraèdres fait apparaître des éléments de formes différentes. L'élément de la figure 4.1 est découpé au milieu des 6 arêtes, faisant apparaître 4 tétraèdres (en bleu) identiques à l'élément originel. Il reste alors un octaèdre (en rouge) à découper. On montre que les éléments seront moins étirés si la découpe se fait le

long de la plus petite diagonale.

---

**ALGORITHME 4.1** – *Algorithme d'intégration adaptative (exemple utilisant une quadrature à 4 et 5 points).*

---

**Données :** Un élément cible  $\mathcal{K}$  et la fonction source  $u_s$

**Résultat :** La valeur  $I$  de l'intégrale de  $\int_{\mathcal{K}} u_s$

```

1   $I = 0$  ;
2  Initialisation de la liste d'éléments  $L_t$  avec  $\mathcal{K}$  ;
3  tant que  $L_t$  n'est pas vide faire
4      Prendre  $\mathcal{K}_i$  le premier élément de la liste  $L_t$  ;
5      Calculer  $I_4$ , l'intégrale  $\int_{\mathcal{K}_i} u_s$  à l'aide d'une quadrature à 4 points ;
6      Calculer  $I_5$ , l'intégrale  $\int_{\mathcal{K}_i} u_s$  à l'aide d'une quadrature à 5 points ;
7      si  $\|I_5 - I_4\| > \text{max tol.}$  alors
8          Découper l'élément courant  $\mathcal{K}_i$  en un ensemble de sous éléments  $\{\mathcal{K}_j\}$  ;
9          Ajouter l'ensemble  $\{\mathcal{K}_j\}$  à la liste des éléments à tester  $L_t$  ;
10     sinon
11         Actualisation de la valeur de l'intégrale :  $I = I + I_5$  ;
12     fin
13     Retrait de  $\mathcal{K}_i$  de la liste  $L_t$  ;
14 fin
```

---

### 4.2.2 Résultat numérique

Deux maillages sont choisis, le test repose sur la projection  $\mathcal{L}^2$  d'une fonction nodale discrétisée issue du sinus  $u_a = \sin(\alpha\pi r)$ . Plus la valeur de  $\alpha$  est grande et plus les variations de  $u_a$  seront rapides (figure 4.2) au sein d'un élément cible donné. Les erreurs de transfert sont données pour l'intégration adaptative et pour une intégration fixe à 15 points de Gauss. L'aspect conservatif de la méthode dépend beaucoup de la qualité de l'intégration sur le second maillage, et donne un bon indice de la qualité numérique de la méthode d'intégration. La table 4.2 présente les résultats comparatifs : la méthode adaptative préserve la qualité de l'intégration quelle que soit la fonction, au prix d'un allongement du temps de calcul. La méthode à quadrature fixe réalisant toujours le même schéma, sa vitesse d'exécution est constante mais se révèle peu précise si la quadrature n'est plus adaptée aux variations de la fonction.

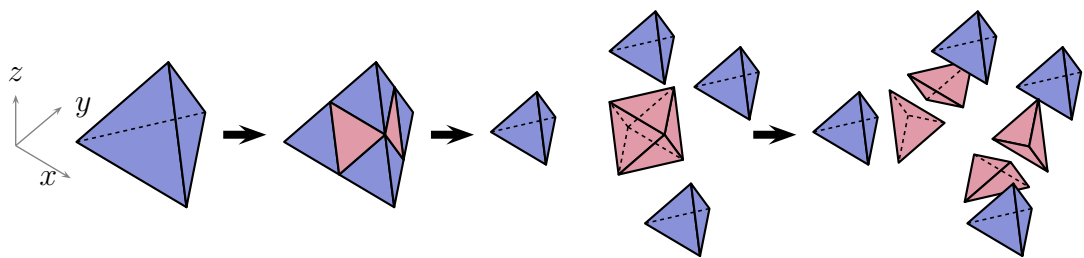


FIGURE 4.1 – Exemple de découpe d’éléments pour un tétraèdre.

		$\alpha$	0,5	1	2	4	6	8
Fixe	Erreur ( $\epsilon_{consv.}^{\%}$ )		0,000	0,001	0,210	0,604	1,240	4,833
	Temps (s)		0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Adaptative	Erreur ( $\epsilon_{consv.}^{\%}$ )		0,000	0,003	0,467	0,122	0,245	0,114
	Temps (s)		0,3	2,0	3,0	9,0	21,0	35,0
	Découpe		0,000	9,899	17,32	56,77	146,2	249,5

TABLE 4.2 – Évolution de l’erreur à maillage fixé. Le nombre moyen d’éléments finaux pour un élément réel du maillage cible est également indiqué (découpe).

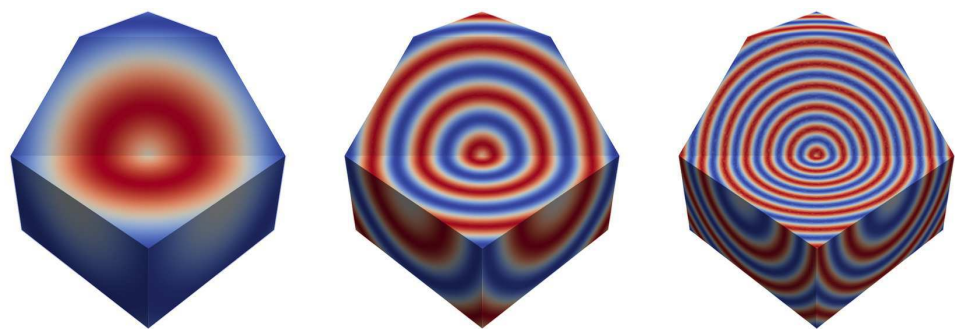
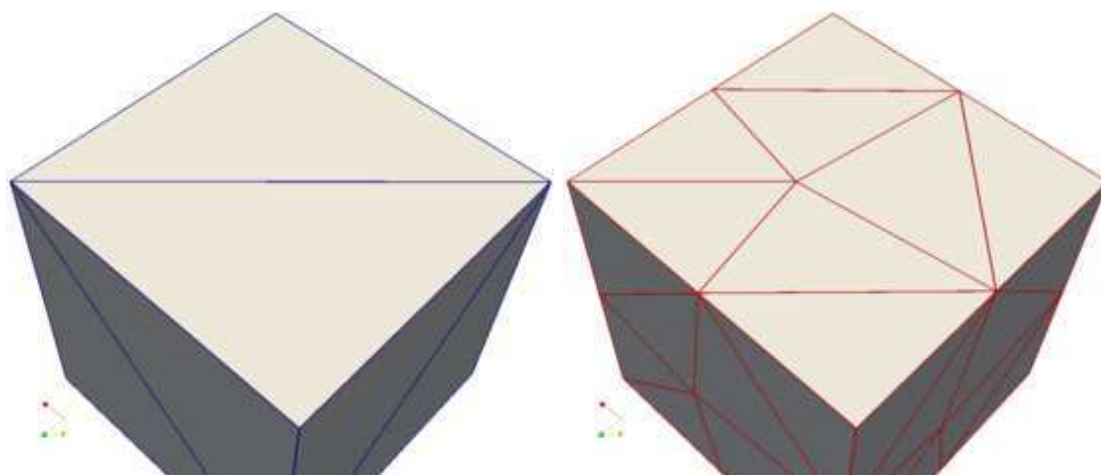
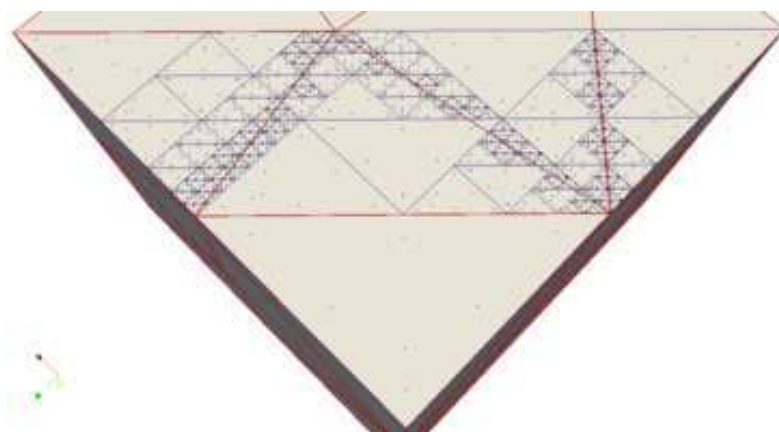


FIGURE 4.2 – Tracé des variations de la fonction source pour  $\alpha$  valant respectivement 1, 4 et 9.

La figure 4.4 représente la subdivision d'une face lorsque les maillages de la figure 4.3 sont utilisés.



**FIGURE 4.3** – Tracé des variations de la fonction source pour  $\alpha$  valant respectivement 1, 4 et 9.



**FIGURE 4.4** – Tracé des variations de la fonction source pour  $\alpha$  valant respectivement 1, 4 et 9.

## 4.3 Parallélisation

On étudie une projection nodale d'une fonction définie sur un maillage contenant 240 000 nœuds (13 200 000 éléments) vers un maillage de 251 000 nœuds (2 300 000 éléments). On se propose de tester l'efficacité de l'assemblage parallèle de la matrice. Les résultats pour une exécution séquentielle des trois méthodes est donné en table 4.3.

Méthode	Exacte	Quadrature fixe	Quadrature adaptative
Durée (s)	260	47	82

**TABLE 4.3** – *Temps de calcul pour chacune des méthodes, pour une exécution séquentielle du programme.*

Les test ont montrés que les temps de calcul sont essentiellement en  $O(M + N)$ , où  $M$  et  $N$  sont les nombres d'éléments des deux maillages. Cette propriété est due à l'algorithme de localisation de points.

L'assemblage de la matrice fait appel à des opérations indépendantes pouvant facilement être parallélisées. Les temps de calculs en fonction du nombre de cœurs utilisés sont donnés dans la table 4.4. L'accélération est proche d'être optimale.

Nombre de cœurs	Durée (s)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Quadrature fixe	47	24	16	13	10	8	7	6
Quadrature adaptative	82	41	23	21	16	13	12	10

**TABLE 4.4** – *Temps de calcul en fonction du nombre de cœurs.*

## 4.4 Conclusion

Les méthodes sans calcul d'intersection sont très attractives dès lors que la précision n'est plus le critère absolu. Deux grandes méthodes ont été développées : l'une utilisant des quadratures fixes d'ordre élevée, l'autre étant basée sur un schéma adaptatif.

L'utilisation d'une quadrature fixe est simple et très rapide. Il faut cependant avoir une connaissance *a priori* de la variation de la fonction source pour pouvoir adapter l'ordre. L'intégration adaptative est plus complexe et plus coûteuse en terme de calculs, mais se révèle être le meilleur compromis entre rapidité et précision, et se situe par conséquent à mi-chemin entre la méthode fixe et le calcul exact des intersections.

# Conclusion

Cette partie aborde le problème posé par le transfert d'une solution entre maillages. Nous avons présenté trois méthodes utilisées pour effectuer ce transfert : l'interpolation, les projections et les projections orthogonales ou localement conservatives.

Les méthodes d'interpolation sont à la fois les plus répandues et les plus simples. Elles reposent sur la détermination des intégrales sur les différents éléments du maillages (nœuds, arêtes, faces, éléments). Les méthodes d'interpolations ne sont pas *a priori* conservatives et sont réputées pour être diffusives. La méthode de projection orthogonale cherche, parmi les fonctions pouvant être décrite par l'espace fonctionnel associé au second maillage, la fonction la plus proche de la fonction initiale pour une norme donnée. Le principal problème demeure la définition d'un produit scalaire (et donc d'une norme) adapté. Les projections localement conservatives reposent sur la détermination, élément par élément, de DdL locaux permettant de définir un champ équivalent à la référence. La solution est ensuite déterminée à l'aide d'une reconstruction globale.

Ces diverses méthodes ont été testées numériquement sur des exemples arbitraires. Ces exemples numériques montrent que, pour les nœuds, les méthodes de projection orthogonales sont bien supérieures en terme de précision et de conservation aux méthodes d'interpolations. Cette conclusion est à nuancer si on considère des fonctions discrétisées par des éléments d'arêtes ou de faces. On a aussi pu mettre en évidence une forte dépendance des méthodes de projection envers les produits scalaires utilisés : des phénomènes d'oscillations ou de lissage peuvent apparaître.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la mise en œuvre de ces méthodes. Des algorithmes de calcul rapide d'intersections ont été présentés. Nous avons enfin présenté des méthodes plus rapides permettant de réaliser les intégrales nécessaires au calcul global des projections. Les schémas d'intégrations adaptatifs sont d'une bonne



efficacité, et permettent d'assurer une bonne précision de calcul.

## CINQUIÈME PARTIE

### Application à la modélisation des systèmes



# Introduction

Les différentes méthodes numériques précédemment développées ont été appliquées dans un premier temps à des cas académiques (incluant des phénomènes de couplages) et représentatifs de problèmes concrets. On propose premièrement de présenter des applications possibles des méthodes de couplages envisagées. Un second chapitre aborde le problème industriel de la modélisation magnéto-mécanique des cages de développantes.

Les méthodes de projections sont particulièrement adaptées à la création d'interfaces génériques permettant de faire communiquer les codes. Des schémas génériques peuvent être concus pour différentes classes de modèles (par exemple les problèmes magnéto-mécanique, magnéto-thermique, magnéto-thermo-mécanique). Ce chapitre cherche à élaborer un schéma générique adapté à chaque type de problèmes.

Plusieurs choix sont possibles pour le calcul d'un problème donné, la précision et le coût en calcul peuvent varier en fonction de la stratégie utilisée. D'une part, le choix des grandeurs physiques pouvant servir de terme de couplage impacte directement la précision du modèle et l'étendue topologique de la projection. D'autre part, le processus global doit être le plus rapide possible tout en respectant le schéma en temps de chacune des physiques. Pour chaque type de problème les différents choix possibles sont testés, un cas test analytique est choisi pour déterminer quel schéma offre la meilleure efficacité numérique.



# Chapitre 1

## Schémas génériques de couplages

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Couplage Magnéto-mécanique . . . . .</b>	<b>222</b>
1.1.1	Modèle général pour le couplage magnéto-mécanique . .	222
1.1.2	Hypothèses simplificatrices magnétiques . . . . .	225
1.1.3	Hypothèses simplificatrices de remaillage . . . . .	225
1.1.4	Pré-traitement des forces . . . . .	228
1.1.5	Comparaison numérique des méthodes . . . . .	229
1.1.6	Cas tests utilisés . . . . .	231
1.1.7	Résultats de calculs . . . . .	234
1.1.8	Mécanique avec mouvement . . . . .	235
1.1.9	Perspective : couplage fort multi-maillages . . . . .	242
<b>1.2</b>	<b>Couplage Magnéto-thermique . . . . .</b>	<b>244</b>
1.2.1	Principe . . . . .	244
1.2.2	Cas test analytique . . . . .	245
<b>1.3</b>	<b>Couplage magnéto-thermo-mécanique . . . . .</b>	<b>247</b>
1.3.1	Principe . . . . .	247
1.3.2	Cas test statique . . . . .	248
1.3.3	Exemple dynamique . . . . .	251

---

## 1.1 Couplage Magnéto-mécanique

Les systèmes électromécaniques sont soumis à des modifications d'une partie de leur structure. L'évolution du déplacement est souvent influencée par l'état magnétique, lui-même étant souvent dépendant de la position de la structure du système. La modélisation de tels systèmes requiert donc la résolution parallèle des modèles magnétique et mécanique. Le problème magnétique influe sur le problème mécanique au travers des forces magnétiques (déterminées à partir des champs magnétiques) ou au travers de la modification des propriétés mécaniques. Les paramètres mécaniques influent en retour sur le problème magnétique au travers des lois de comportement, ou par modifications structurelles. Ce chapitre se concentre sur les problème couplés par les forces et par le déplacement.

### 1.1.1 Modèle général pour le couplage magnéto-mécanique

L'objectif de cette section est de modéliser de manière générique les systèmes électromécaniques avec mouvement. Pour ce faire, nous allons utiliser une description Lagrangienne des équations de Maxwell. Pour rappel, on note par  $x_0$  la position de référence (instant 0) d'un point quelconque du domaine de calcul  $\mathcal{D}$ , et par  $x$  sa position à l'instant  $t$ . On note en particulier  $u(t)$  la fonction de placement des points à l'instant  $t$  :

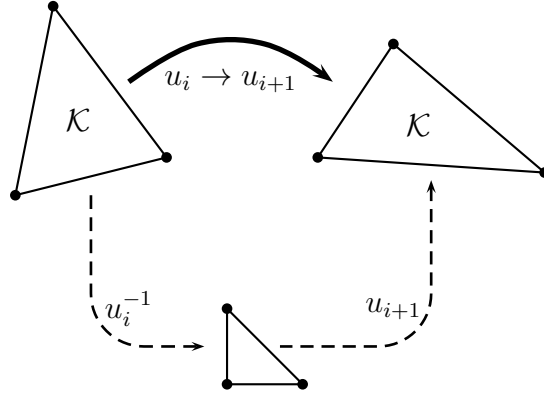
$$u(t) := x \rightarrow u(t, x_0). \quad (1.1)$$

Par abus de notation,  $u$  désignera de manière générale la fonction de placement ou la valeur de  $u(t, x_0)$  d'un point à l'instant  $t$ . La vitesse en tout point de l'espace est par conséquent  $v(t, x_0) = \partial_t u(t, x_0)$ . Ce système doit posséder quelques caractéristiques, en particulier que  $u$  soit bijective en  $x_0$  pour tout  $t$  (il n'y a ni disparition ni création de matière), et continue en  $x_0$  et  $t$ . De même, la vitesse doit être continue en  $x_0$  et  $t$ , et Lipschitz continue en  $x_0$  (RAPETTI 2000). Ces propriétés permettent en particulier de définir  $u^{-1}$ , le placement vers la position de référence, ainsi  $x_0 = u^{-1}(t, x)$ . Le formalisme Lagrangien permet de décrire l'évolution d'un système en mouvement en suivant chaque particule en mouvement. Cette particularité est avantageuse pour les équations de Maxwell car :

$$d_t B(t, x) = \frac{B(t + \Delta t, x) - B(t, x)}{\Delta t} = \partial_t B, \quad (1.2)$$

$x$  ayant évolué entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Les équations de Maxwell sous leurs formes de l'ARQS ne changent donc pas. La description Lagrangienne permet en particulier

de ne pas à avoir à calculer le terme d'advection en  $v \cdot \text{grad}$  qui peut être délicat à prendre en compte numériquement. Cependant, il va falloir utiliser les différentes fonctions de placement (calculées à chaque pas de temps) pour pouvoir retrouver la valeur de  $B$ , à l'instant  $t - \Delta t$ , du point  $x$  (donné à l'instant  $t$ ). Pour cela, les fonctions  $u$  et  $u^{-1}$  sont d'une grande aide (voir figure 1.1).



**FIGURE 1.1** – Applications de placements géométriques pour deux pas successifs. Ces applications sont utiles pour déterminer la valeurs d'un champ, à un point donné pour un instant antérieur.

On suppose que le modèle magnétique est résolu par l'une des formulations présentées dans la partie I. D'une manière générale, on suppose que la formulation produit le système linéaire suivant :

$$[P][\dot{X}] + [N][X] = [S] + [\dot{S}], \quad (1.3)$$

où la matrice  $[X]$  représente l'ensemble des inconnues magnétiques, et les matrices  $[S]$  et  $[\dot{S}]$  sont les membres de droites calculés à partir des termes sources et la dérivée des termes sources, respectivement. Ce système peut être résolu de manière simple, en utilisant une méthode générique d'intégration en temps ( $\theta$ -méthode). Ceci sous-entend qu'il faut en particulier connaître, au pas de temps de numéro d'ordre  $i + 1$ , les termes :

- $[X]_i$  ;
- $u_i$  et  $u_i^{-1}$ .

Dans la mise en œuvre du schéma de couplage, ces champs seront à sauvegarder entre deux appels de code. En pratique, toutes ces données peuvent être stockées dans un format structuré de type HDF5 (format MED développé par EDF).



Le modèle mécanique est celui de l'élasticité linéaire en régime temporel décrit par le système linéaire suivant :

$$[M][\ddot{u}] + [C][\dot{u}] + [K][u] = [F]. \quad (1.4)$$

On rappelle que  $[M]$  est la matrice de masse du système mécanique,  $[K]$  est la matrice de rigidité.  $[C]$  est une éventuelle matrice d'amortissement issue d'un modèle de frottement visqueux global. Il s'agit du modèle de Rayleigh, pouvant modéliser un amortissement visqueux uniformément réparti, dont le sens physique peut être mis en doute mais qui est cependant pratique pour les tests numériques. L'avantage est qu'il permet d'assembler la matrice  $[C]$  à faible coût à partir des matrices  $[M]$  et  $[K]$  :

$$[C] = \alpha_{Ray}[K] + \beta_{Ray}[M]. \quad (1.5)$$

Nous avons choisi un schéma d'intégration temporel mécanique de type Newmark car il permet de ne pas introduire d'amortissement parasite, et sa précision est généralement très bonne. On assemble le vecteur  $[U]$  ainsi :

$$[U] = \begin{bmatrix} [u] \\ [\dot{u}] \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Le schéma de Newmark permet d'exprimer la dérivée du vecteur combiné vitesse / position  $[U]$  à l'aide des constantes du modèle  $\gamma_{New}$  et  $\beta_{New}$  :

$$[\dot{U}]_{i+1} = [\dot{U}]_i + \Delta_t[(1 - \gamma_{New})[\ddot{U}]_i + \gamma_{New}[\ddot{U}]_{i+1}], \quad (1.7a)$$

$$[U]_{i+1} = [U]_i + \Delta_t[\dot{U}]_i + \Delta_t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta_{New} \right) [\ddot{U}]_i + \beta_{New}[\ddot{U}]_{i+1} \right]. \quad (1.7b)$$

Par élimination de  $[\ddot{U}]_{i+1}$  et de  $[\dot{U}]_{i+1}$ , le schéma conduit à résoudre le système :

$$[K'] [U]_{i+1} = [R'], \quad (1.8)$$

où les matrices  $[K']$  et  $[R']$  sont respectivement appelées « rigidité effective » et « chargement effectif ». La matrice  $[K']$  dépend de  $[M]$ , de  $[C]$  et de  $[K]$ . Elle peut être calculée à chaque pas de temps de manière classique. La matrice  $[R']$  dépend à chaque pas de temps de la charge réelle  $[F]_{i+1}$  à l'instant donné, des déplacements, vitesses et accélérations du pas de temps précédent ( $[\ddot{u}]_i$ ,  $[\dot{u}]_i$ ,  $[u]_i$ ), et des matrices  $[M]$  et  $[C]$ . Ce dernier point montre qu'il faut utiliser, à l'instant d'ordre  $i + 1$ , les valeurs de positions, vitesses et accélérations de l'instant  $i$ . Tout comme pour le domaine magnétique, les champs sont à sauvegarder entre deux appels de code.

La figure 1.2 présente un schéma de couplage magnéto-mécanique, dans le domaine temporel sur maillages non conformes. En toute rigueur, cette opération nécessite deux projections entre magnétisme et mécanique, mais aussi des projections magnétisme / magnétisme, et mécanique / mécanique entre deux remaillages. Nous allons détailler des méthodes permettant sous des hypothèses peu restrictives, de réduire les coûts de calculs.

### 1.1.2 Hypothèses simplificatrices magnétiques

Les constantes de temps physiques des systèmes électromécaniques sont souvent relativement différentes, permettant ainsi de négliger les courants induits par les déplacements des pièces mécaniques. Il est raisonnable de considérer que, pour chaque pas de temps mécanique, le problème magnétique est considéré comme étant un problème à courant de Foucault en régime stationnaire et en considérant la géométrie actualisée. Ce choix permet, entre autres, de pouvoir considérer un modèle magnétique fréquentiel<sup>1</sup>.

Le schéma de la figure 1.2 peut être simplifié car il n'y a pas à relire les précédentes valeurs d'inconnues magnétiques ni à projeter les inconnues entre les étapes de remaillage, la géométrie seule suffit.

### 1.1.3 Hypothèses simplificatrices de remaillage

***Remaillage complet*** Pour les grands déplacements, l'étape de remaillage permet de générer un maillage de qualité constante tout le long des déplacements. Cette étape est néanmoins très lourde car la génération de grands maillages est très coûteuses en temps et en mémoire. De plus, il est nécessaire d'actualiser les valeurs des inconnues magnétiques et mécaniques sur ce maillage à l'aide d'une projection. On peut toutefois alléger cette procédure en ne remaillant que les parties mobiles et l'air.

***Déplacement de maillage (figure 1.3)*** Cette méthode est très efficace pour les petits déplacements (vibrations par exemple, VOISIN 2000), le nombre de nœuds et d'éléments ainsi que la connectivité sont conservés. L'intérêt principal de conserver

---

1. Ce choix a essentiellement été dicté par la disponibilité du solveur fréquentiel seul lors des développements.

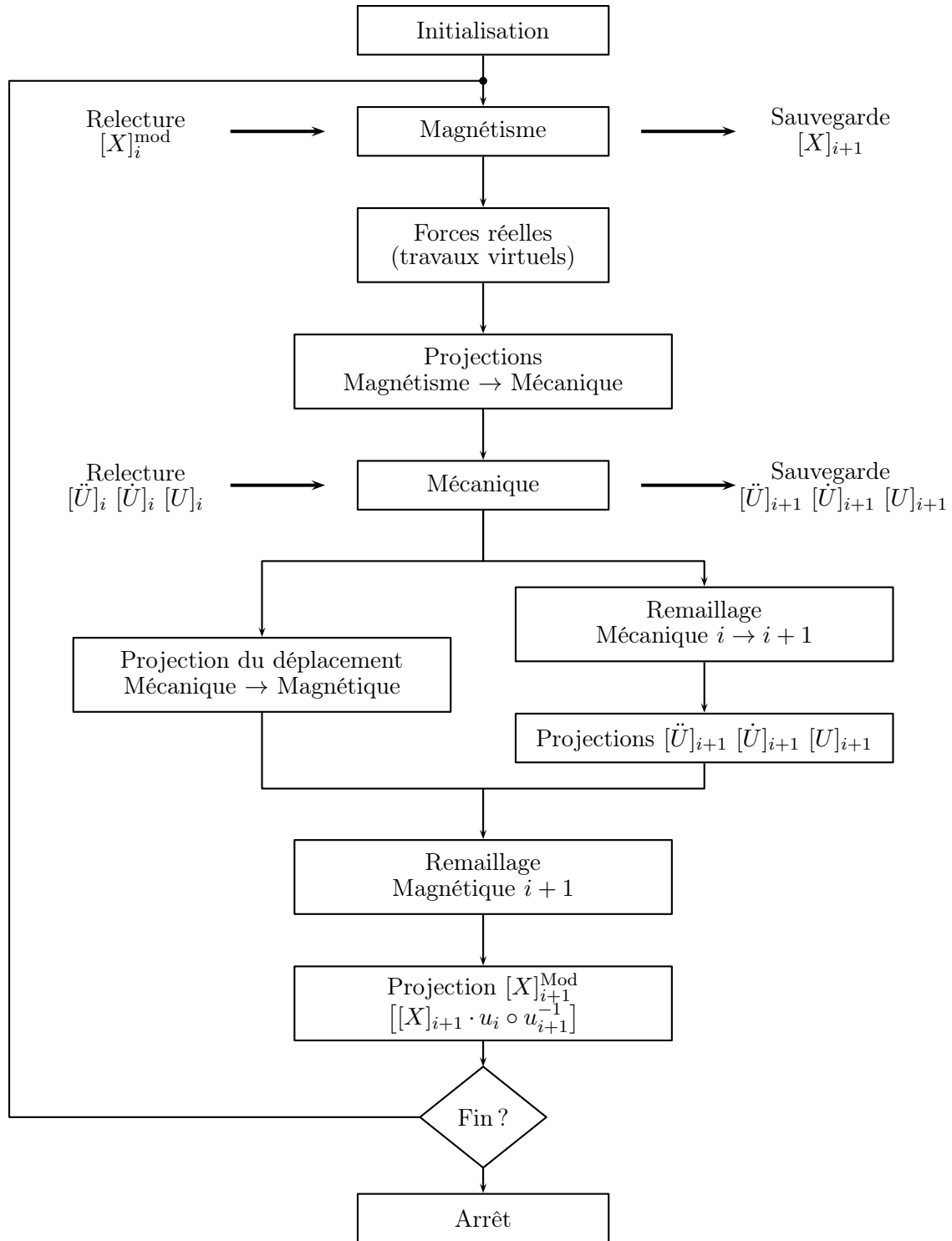
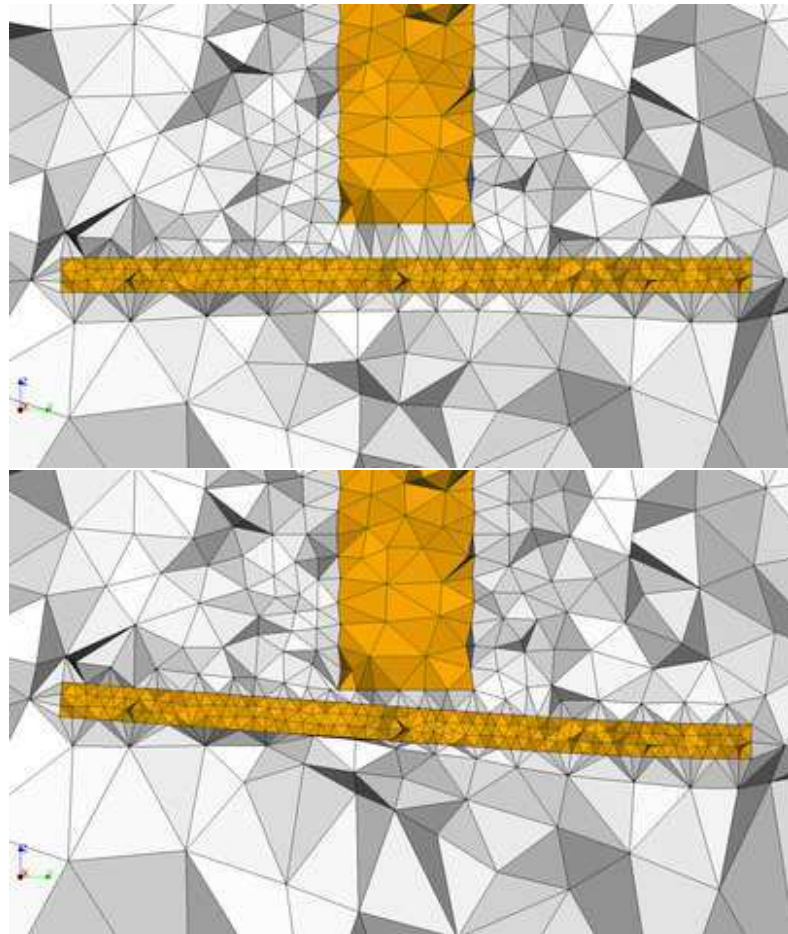


FIGURE 1.2 – Schéma temporel complet.



**FIGURE 1.3** – *Exemples de déformées de maillages. L'interpolation du déplacement sur une large zone de l'espace retarde l'apparition d'éléments déformés.*

la connectivité est qu'un champ discrétisé par un vecteur de DdL  $[X]$  conservera la même représentation après la modification du maillage. Les étapes de projection pour une même physique ne sont plus nécessaires. De plus, la méthode ne consomme que très peu de mémoire et est très rapide à l'exécution.

Le déplacement de chaque nœud  $i$  est défini ainsi :

$$u(i) = \begin{cases} 0 & \text{pour les parties fixes ;} \\ u(i) & \text{pour les parties mobiles mécaniques ;} \\ \frac{u(i_{mob})|x-x(i_{fix})|}{|x(i_{mob})-x(i_{fix})|} & \text{pour le reste ;} \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $i_{mob}$  est l'indice du nœud le plus proche appartenant à une partie mobile et  $i_{fix}$  l'indice du nœud le plus proche appartenant à une partie fixe.  $x(i_{fix})$ ,  $x(i_{mob})$  et  $u(i_{mob})$  sont leurs positions et valeur de déplacement respectivement.

### 1.1.4 Pré-traitement des forces

Les forces sont issues de la méthode des travaux virtuels, et les valeurs représentent des forces globalisées dites « forces nodales » :

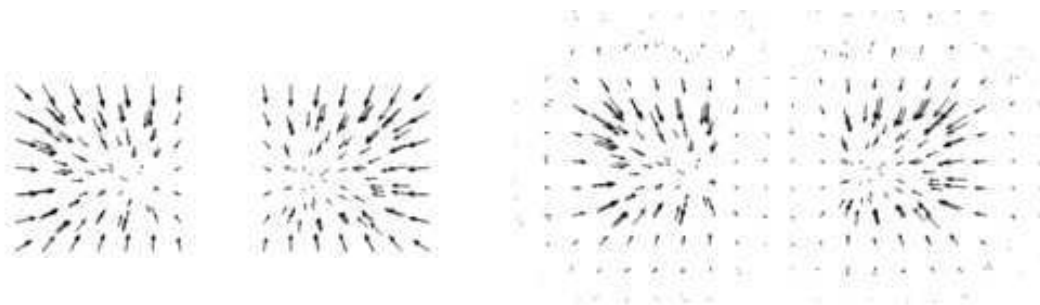
$$F_i = \int_{\mathcal{D}} f w_i^n, \quad (1.10)$$

où  $F_i$  est la force nodale issue du  $i^{\text{ème}}$  nœud du maillage,  $w_i^n$  est la fonction de forme associée au nœud, et  $f$  est la densité de force (définie dans le volume). La densité de force est la source la plus adaptée pour la projection des forces et le code de mécanique utilisé. Pour obtenir la densité de force globale, l'équation 1.10 est résolue pour l'ensemble des nœuds du maillage par résolution du système :

$$[M][f] = [F], \quad (1.11a)$$

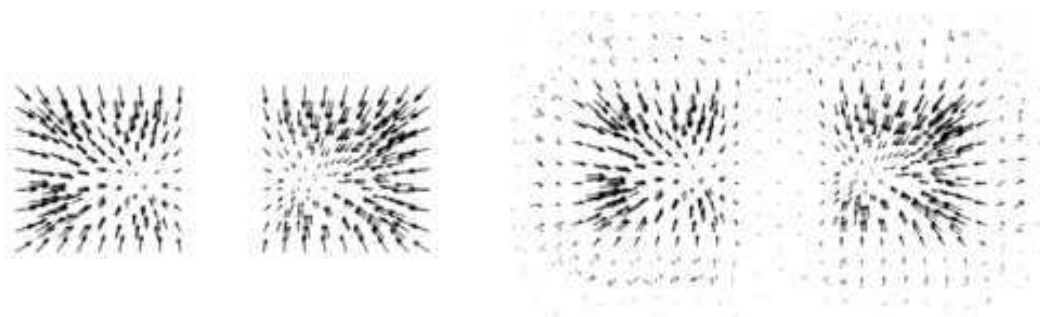
$$M_{ij} = \int_{\mathcal{D}} w_i^n w_j^n. \quad (1.11b)$$

**Cas de la présence d'air** Ce système doit toutefois être résolu sur l'ensemble des parties mécaniques. Dans le cas de la présence de parties non mécaniques (généralement de l'air), il convient de restreindre l'étendue spatiale de la résolution de la densité. Dans le cas contraire, la solution vient « diffuser » dans l'air, entraînant l'apparition de forces parasites. La figure 1.4 présente la résolution de la densité de force, pour une section, dans le cas de deux spires superposées.



**FIGURE 1.4** – *Gauche* : densité de forme déterminée sur les seules parties mécaniques. *Droite* : exemple de diffusion de la solution dans l'espace environnant.

Cette précaution doit être aussi prise pour l'étape de projection. La figure 1.5 présente le cas de la projection de la densité de force. Ces étapes sont réalisées par re-numérotation locale des nœuds.



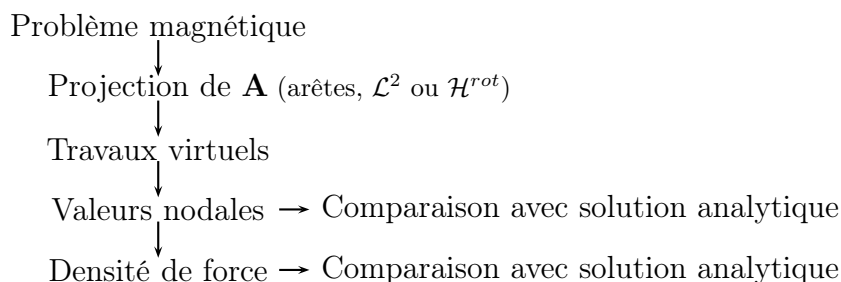
**FIGURE 1.5** – *Gauche* : densité de force après projection en utilisant les restrictions adaptées. *Droite* : densité de force sans restriction.

### 1.1.5 Comparaison numérique des méthodes

Afin de coupler les problèmes magnétiques et mécaniques, il est possible d'utiliser plusieurs grandeurs magnétiques. On souhaite tester, à l'aide de deux cas analytiques, la précision de chacun de ses types de couplages. Deux maillages sont considérés, on se propose de mesurer l'efficacité du couplage en comparant, à l'aide du second maillage, la solution numérique obtenue par projection avec la solution analytique. Trois types de grandeurs sont considérés : les potentiels magnétiques, l'induction magnétique (ou le champ magnétique) et la densité de force.

### Projection du potentiel magnétique

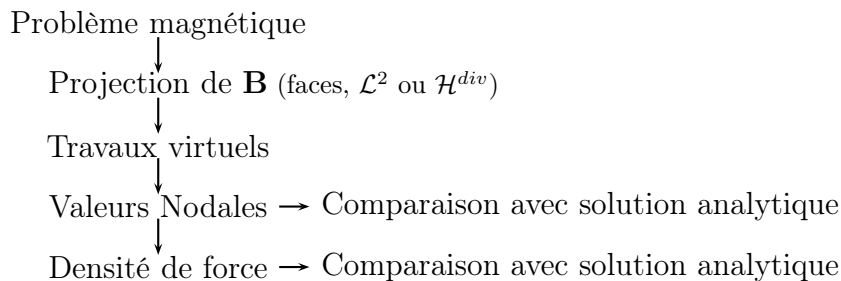
La méthode la plus directe consiste à utiliser les inconnues du problème magnétique,  $A$  ou  $\Omega$  selon la formulation utilisée. Les forces sont calculées à l'aide de la méthode des travaux virtuels directement sur le second maillage, les inconnues magnétiques étant déterminées à l'aide des méthodes de projections et des produits scalaires adéquats ( $\mathcal{L}^2$ ,  $\mathcal{H}^{grad}$  ou  $\mathcal{H}^{rot}$ ). La figure 1.6 présente le cas où le potentiel vecteur magnétique est utilisé comme variable de transfert.



**FIGURE 1.6** – *Détail des principales étapes de calcul pour un couplage utilisant le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .*

### Projection de l'induction ou du champ magnétique

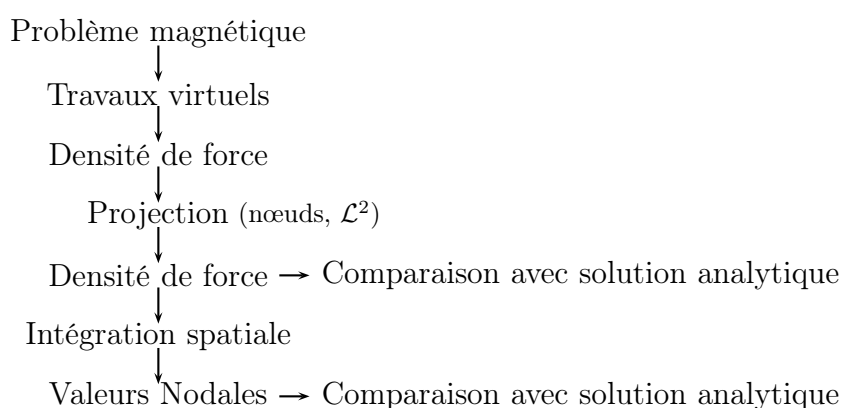
Une opération similaire consiste à projeter les champs physiques  $B$  ou  $H$ . Les forces sont alors calculées sur le second maillage, les méthodes de projections peuvent être basées sur le produit de  $\mathcal{L}^2$  ou celui de  $\mathcal{H}^{div}$  (respectivement  $\mathcal{H}^{rot}$ ) suivant la grandeur utilisée. La figure 1.7 présente la succession des étapes à réaliser pour un tel couplage.



**FIGURE 1.7** – *Exemple de couplage à l'aide du champ magnétique.*

### Projection de la densité de force

La troisième stratégie envisagée repose sur la projection de la densité de force et diffère des deux précédentes. Dans les deux cas précédents, la méthode des travaux virtuels est appliquée sur le second maillage alors que le schéma considéré nécessite le calcul des forces (et de leur densité) sur le maillage magnétique. Il faut en outre calculer la densité de force avant projection. Dans ce cas, aucune grandeur magnétique n'est à déterminer sur le maillage mécanique. Les étapes à réaliser sont présentées sur la figure 1.8.



**FIGURE 1.8** – Principales étapes utilisées pour le test du couplage à l’aide de la densité de force. Une étape de détermination de la densité de force est nécessaire, une intégration spatiale est ajoutée afin de comparer les valeurs nodales.

La projection de la densité de force présente un avantage car le second maillage peut n’être constitué que des parties mécaniques. La restriction spatiale est plus délicate dans le cadre des deux premiers cas, car le calcul correct des efforts surfaciques ne peut être fait à partir de la connaissance de l’état magnétique d’un seul côté de la surface.

#### 1.1.6 Cas tests utilisés

Deux cas tests possédant chacun une solution analytique sont considérés : une barre et un fil cylindrique. Le premier exemple permet de valider le transfert des forces, le second cherche à valider les grandeurs mécaniques issues du couplage magnéto-mécanique et permet notamment de calculer intégralement de manière analytique ce type de couplage.



### Barre à courant uniforme

**Description** On considère une barre de côté  $l$  unitaire, parcourue par un courant de répartition uniforme ( $J = 1\text{A/m}^2$ ), et possédant des conditions aux limites du type  $B \times n = 0$  sur les surfaces latérales. La perméabilité est supposée unitaire dans tout le volume. La figure 1.9 présente un schéma du cas considéré. La valeur analytique du champ est donnée par une série :

$$B \begin{cases} \frac{16J\mu_0 l}{\pi^3} \sum_n \sum_p \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2p+1)\pi y}{l}}{(2n+1)[(2n+1)^2 + (2p+1)^2]}, \\ \frac{16J\mu_0 l}{\pi^3} \sum_n \sum_p \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2p+1)\pi y}{l}}{(2n+1)[(2p+1)^2 + (2p+1)^2]}, \end{cases}$$

pour laquelle les 10 000 premiers termes sont calculés. Cet exemple est par ailleurs invariant selon la direction du courant.

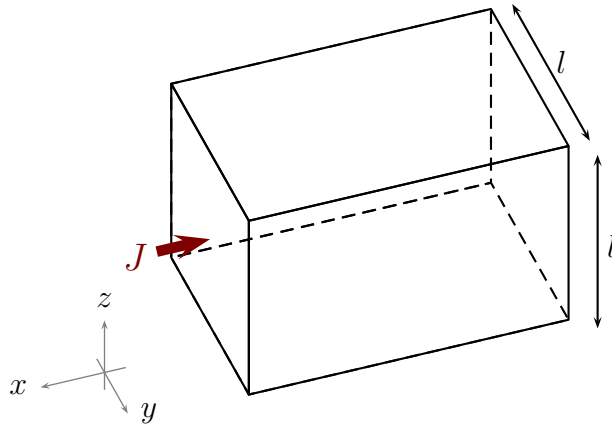


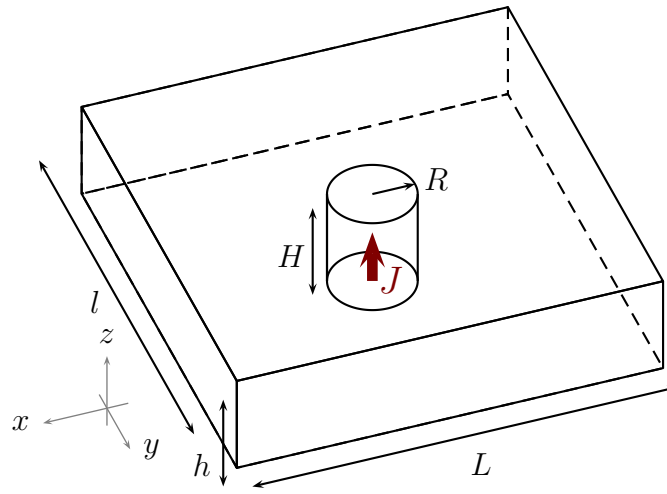
FIGURE 1.9 – Détail de la géométrie de la barre.

**Maillages** Le maillage initial utilisé pour la résolution magnétique est composé de 43 000 tétraèdres. Le second maillage, celui sur lequel est évaluée la solution analytique de référence, est géométriquement identique et composé de 13 000 tétraèdres.

### Fil cylindrique à courant uniforme

Ce deuxième exemple possède une solution analytique pour le problème mécanique associé (MOON 1984). On peut alors tester l'influence de la stratégie de

couplage sur les grandeurs mécaniques. Ce cas test représente un fil cylindrique, plongé dans l'air, et parcouru par un courant de répartition uniforme. Des conditions aux limites du type  $B \times n = 0$  sont ajoutées aux bords latéraux de la boîte d'air considérée. Bien que la modélisation de l'air environnant ne soit pas strictement nécessaire, il a été décidé d'utiliser deux maillages d'étendue différente pour chacune des physiques en ajoutant l'air latéral pour le domaine magnétique. Ce type de maillages est plus proche du modèle de cages de développantes par rapport aux maillages du seul fil. La figure 1.10 présente une description du cas considéré.



**FIGURE 1.10** – *Détail pour le cas du conducteur cylindrique dans l'air.*

Le fil possède un rayon  $R = 1$  mm, un module d'Young  $E = 120$  GPa et un coefficient de poisson  $\nu = 0,3$ . Le courant total est imposé à  $I = 1$  A. Il s'agit d'un problème unidirectionnel dans la direction radiale. La valeur analytique de la contrainte (associée au rayon) est donnée par :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{-\mu_0 I^2}{16 \pi^2 R^2} \frac{(3 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (1.12)$$

**Maillages** Le maillage magnétique, constitué du cylindre et de la boîte d'air, est formé de 300 000 tétraèdres. Le maillage mécanique, constitué du seul fil, est composé de 20 000 éléments.

### 1.1.7 Résultats de calculs

Les tableaux 1.1 et 1.2 présentent les résultats pour les différentes stratégies et différents produits scalaires. Il est intéressant de noter que la projection  $\mathcal{L}^2$  des potentiels n'est pas recommandée. La précision obtenue sur les potentiels en eux-mêmes n'est pas utile, les efforts dépendant surtout de la répartition des champs magnétiques associés. La projection  $\mathcal{L}^2$  des potentiels n'inclue pas de critère sur les champs associés aux potentiels. Les résultats obtenus étant grandement améliorés avec l'utilisation du produit scalaire de  $\mathcal{H}^{rot}$  ou  $\mathcal{H}^{grad}$ .

On remarque que la projection  $\mathcal{L}^2$  de l'induction magnétique donne de bons résultats. Cependant nous préférons l'utilisation de la projection  $\mathcal{L}^2$  de la densité de force car la densité obtenue sur le second maillage est directement utilisable par le code mécanique. De plus, la gestion du changement de topologie du maillage est grandement simplifiée.

On constate également que pour la formulation en  $A$ , la projection  $\mathcal{L}^2$  de l'induction magnétique donne des résultats semblables à celle de la projection  $\mathcal{H}^{rot}$  du potentiel. La situation est différente dans le cas de la formulation en  $\Omega$  : la projection du potentiel  $\Omega$  nécessite aussi la projection du champ source  $H_s$ . Les projections de natures différentes des deux champs, mais aussi la structure particulière de  $H_s$  (déterminé par une méthode d'arbre), rendent peu précis le transfert des grandeurs magnétiques sur le maillage mécanique.

Grandeur projetée	Produit	Densité (%)	Valeur nodale (%)
Densité de force ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	1,21	3,78
Densité de force quad. ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	0,97	3,12
Potentiel magnétique, $A$	$\mathcal{L}^2$	59,30	52,72
Potentiel magnétique, $A$	$\mathcal{H}^1$	5,25	4,22
Induction magnétique, $B$	$\mathcal{L}^2$	5,78	4,62
Induction magnétique, $B$	$\mathcal{H}^1$	5,75	4,59
Potentiel magnétique, $\Omega$ & $H_s$	$\mathcal{H}^1, \mathcal{L}^2$	71,47	62,65
Champ magnétique, $H$	$\mathcal{L}^2$	15,12	10,80
Champ magnétique, $H$	$\mathcal{H}^1$	18,24	12,63

**TABLE 1.1** – Test des différentes possibilités de couplage pour l'exemple de la barre.

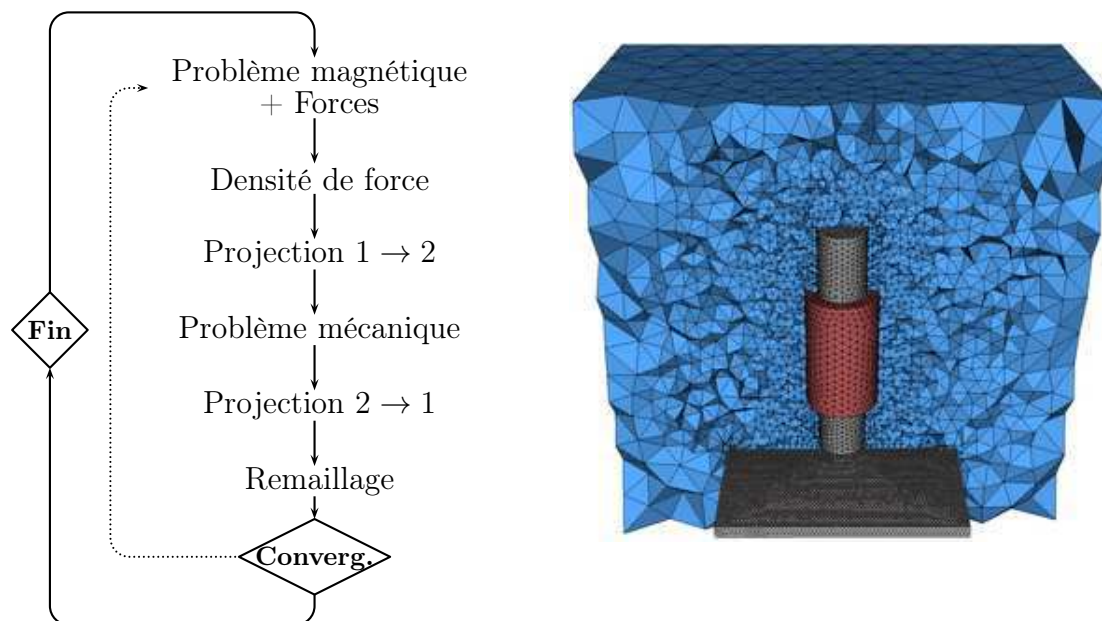
Grandeur projetée	Produit	Valeur / $10^{-3}$	Erreur relative (%)
Densité de force ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	-26,89	1,44
Densité de force quad. ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	-27,06	0,82
Potentiel magnétique, $A$	$\mathcal{L}^2$	-19,33	29,15
Potentiel magnétique, $A$	$\mathcal{H}^1$	-26,66	2,29
Induction magnétique, $B$	$\mathcal{L}^2$	-26,67	2,25
Induction magnétique, $B$	$\mathcal{H}^1$	-24,45	10,39
Densité de force ( $\Omega$ )	$\mathcal{L}^2$	-27,27	0,05
Densité de force quad. ( $\Omega$ )	$\mathcal{L}^2$	-27,30	0,06
Potentiel magnétique, $\Omega$ & $H_s$	$\mathcal{H}^1, \mathcal{L}^2$	-11,04	59,54
Champ magnétique, $H$	$\mathcal{L}^2$	-18,13	33,55
Champ magnétique, $H$	$\mathcal{H}^1$	-17,42	36,15

**TABLE 1.2** – *Test des différentes possibilités de couplage pour l'exemple du conducteur cylindrique.*

### 1.1.8 Mécanique avec mouvement

**Schéma utilisé** Cette partie utilise les hypothèses simplificatrices introduites au paragraphe 1.1.2. Les transitoires mécaniques étant supposés longs devant les transitoires magnétiques, il est possible de ne considérer que le régime permanent pour le modèle magnétique. On négligera par conséquent les courant d'inductions dus au déplacement seul. Le schéma global du problème magnéto-mécanique est présenté sur la figure 1.11. La boucle en pointillé symbolise l'ensemble des appels aux codes de magnétique et de mécanique permettant, à pas de temps donné, de converger vers l'état couplé. La boucle noire symbolise les différents pas de temps considérés.

**Cas test** Nous n'avons malheureusement pas trouvé de cas test analytique pour les problèmes couplés magnéto-mécanique en régime temporel. Nous allons donc comparer les résultats de calculs produits par deux méthodes très différentes. On considère une plaque ferromagnétique placée devant un électro-aimant (voir la figure 1.11). Le système est alimenté à l'instant  $t = 0$ , on se propose d'étudier le déplacement de la plaque au cours du temps.



**FIGURE 1.11** – *Gauche* : schéma global de couplage. *Droite* : maillage magnétique (300 000 tétraèdres linéaires).

**Exemple simple** La figure 1.12 présente les résultats obtenus pour le déplacement vertical de la plaque soumise à un amortissement de Rayleigh quelconque. La variation de force totale et celle du champ magnétique (mesuré au centre du noyau de la bobine) dépendent du déplacement.

### Vérification numérique

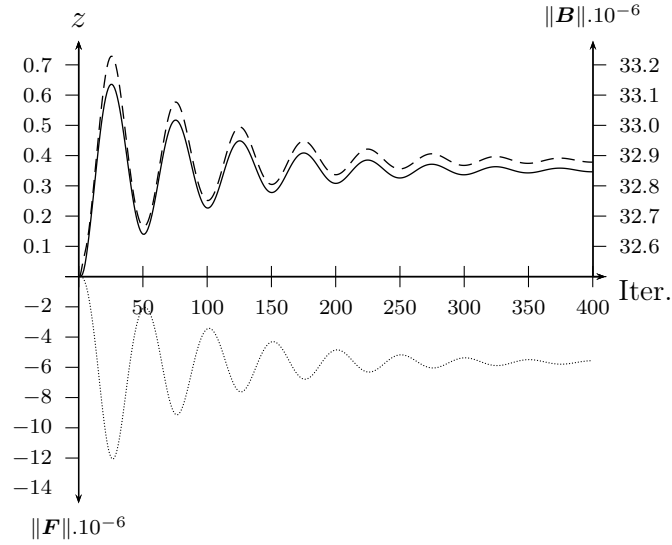
L'objectif est de vérifier la concordance numérique entre les fréquences propres calculées à partir d'une analyse spectrale et de la transformée de Fourier du déplacement obtenue par un calcul temporel.

L'analyse spectrale consiste à calculer l'ensemble des couples  $(\lambda, [\tilde{U}])$  tels que :

$$([K] - \lambda[M])[\tilde{U}] = 0 \text{ et } f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}. \quad (1.13)$$

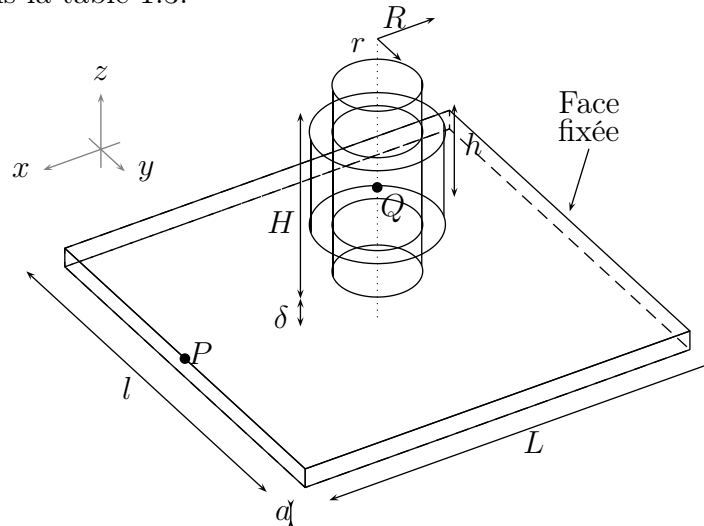
Nous avons utilisé la méthode *Implicit Restarted Arnoldi Method* (IRAM) présentant l'avantage de pouvoir calculer une large portion du spectre. De plus, une estimation de l'erreur sur les fréquences propres est disponible. On utilise le solveur IRAM de la librairie ARPACK.

Certains mode propres sont, de part la répartition du déplacement associé,

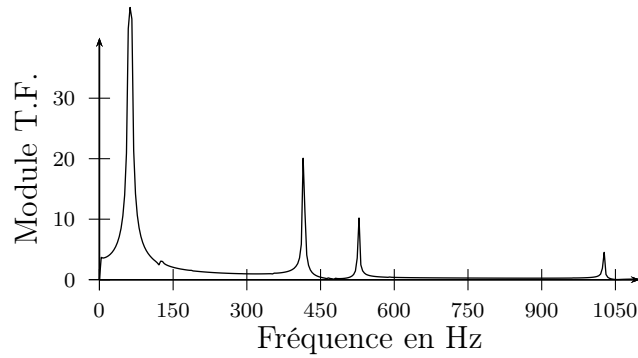


**FIGURE 1.12** – *Traits plein* : déplacement vertical du point  $P$  par analyse temporelle. *Tirets* : Norme de l'induction magnétique au centre du noyau. *Traits pointillés* : force totale, selon l'axe  $z$ , appliquée au noyau de fer.

incompatibles avec une excitation symétrique placée au centre comme présenté dans la figure 1.13. On choisit alors de déplacer l'électro-aimant au centre d'un des quadrants de la plaque, et le point  $P$  est déplacé du centre de l'arête. Un schéma du système est présenté en figure 1.15, et les valeurs des paramètres associés sont reportées dans la table 1.3.



**FIGURE 1.13** – *Détail des paramètres géométriques pour le cas centré.*



**FIGURE 1.14** – Transformée de Fourier du signal obtenue à partir du cas centré. Les modes 1,2,5,9,10 n'apparaissent pas.

$L$	20 mm	$l$	10 mm A	$a$	1 mm
$\delta$	1 mm	$h$	5 mm	$H$	10 mm
$r$	2 mm	$R$	3 mm	$L_{\text{air}}$	60 mm
$\mu_r$	1000	$I$	0,6 A		
$E$	0,3 MPa	$\nu$	0,3	$\rho$	10 kg.m <sup>-3</sup>

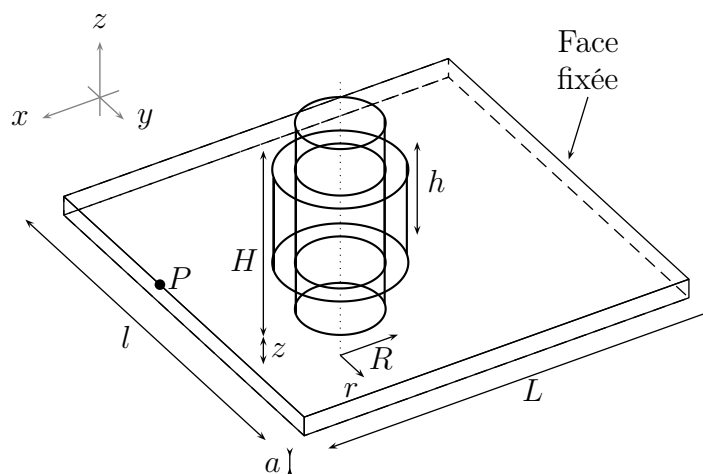
**TABLE 1.3** – Tableau de valeurs des grandeurs physiques utilisées.

Les valeurs au cours du temps du déplacement du point  $P$  sont données figure 1.16. Afin d'obtenir une meilleure précision de la transformée de Fourier, 130 pseudo-périodes ont été calculées. La table 1.4 reporte l'ensemble des modes propres déterminés à partir de l'analyse spectrale.

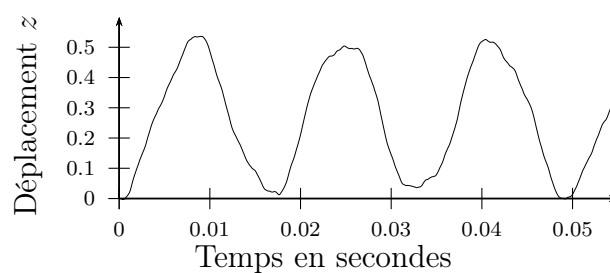
#	$f$ (Hz)	T.F. (Hz)	Erreur (%)	#	$f$ (Hz)	T.F. (Hz)	Erreur (%)
1	69	64,5	6,5	6	866	—	—
2	166	164,5	0,9	7	1036	1025	1,1
3	418	417,5	0,1	8	1185	1167	1,5
4	531	528,5	0,5	9	1237	1218	1,6
5	600	596,5	0,6	10	1360	1334	1,9

**TABLE 1.4** – Tableau des fréquences des dix premiers modes de la plaque, calculés à l'aide des méthodes spectrale et de transformée de Fourier (T.F.).

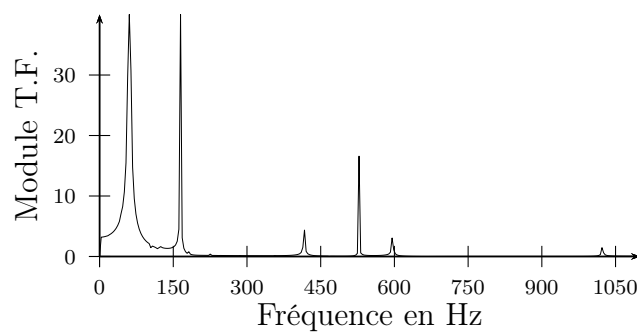
La comparaison avec les pics de la transformée de Fourier montre un bon ac-



**FIGURE 1.15** – Détail des paramètres géométriques pour le cas non centré. Le point  $P$  est déplacé.



**FIGURE 1.16** – Tracé partiel de  $z = \|u(P) - u_{t_0}(P)\|$ .



**FIGURE 1.17** – Transformée de Fourier du signal de la figure 1.16 (Le premier pic est tronqué).

cord entre les deux méthodes de calcul. On observe un glissement vers le bas des fréquences calculées par la méthode temporelle, il s'agit d'un phénomène caracté-



ristique des résolutions dans le domaine temporel. L'erreur obtenue sur le premier mode est possiblement due aux phénomènes de couplage magnétique-mécanique non pris en compte par la méthode spectrale.

### Influence du schéma sur la précision

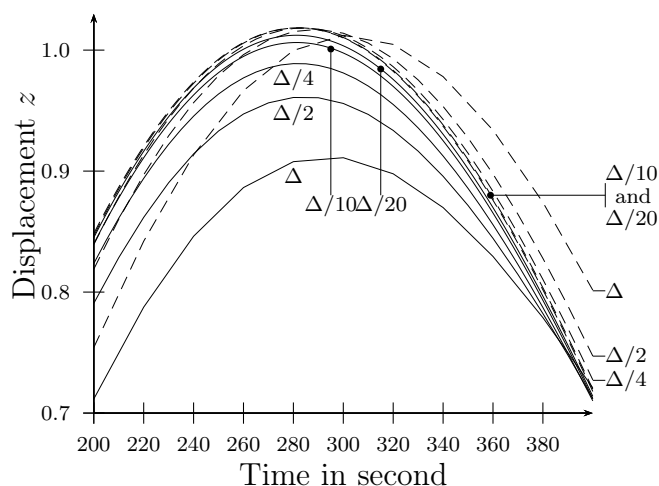
Pour des pas de temps suffisamment petits, la boucle interne permettant de prendre pleinement en compte les effets de couplages peut être supprimée (REN et RAZEK 1990; BESBES et al. 1995; VOISIN 2000). Cet aspect est d'autant plus attrayant qu'un grand nombre de résolutions est ainsi évité.

Ce paragraphe se propose de tester le couplage magnéto-mécanique, en termes de précision et de coût de calcul, pour les deux types de schémas précédents. Pour cela, on reprend le cas (centré) du paragraphe 1.1.8. Les paramètres mécaniques sont  $E = 0,3 \text{ Pa}$  et  $\rho = 0,01 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Pas de temps	Erreur (%)		Temps (h)	
	S.B.	B.	S.B.	S.
$\Delta$	10,5	1,68	0,25	0,71
$\Delta/2$	5,42	0,17	0,50	1,43
$\Delta/4$	2,73	0,13	1,00	2,86
$\Delta/10$	1,05	0,11	2,50	7,10
$\Delta/20$	0,47	0,09	5,00	14,4
$\Delta/40$	0,17	0,08	10,0	28,4

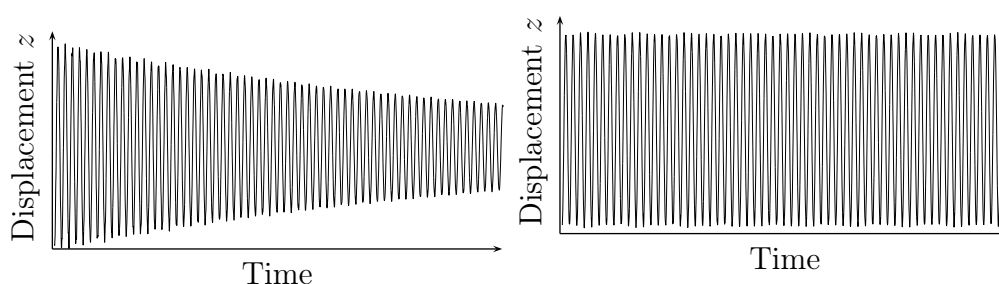
**TABLE 1.5** – *Comparaison de l'erreur et du temps de calcul pour différentes valeurs du pas de temps. **Colonne gauche** : sans la boucle interne (S.B.); **Colonne droite** : avec la boucle (B.).*

Le tableau 1.5 présente, pour les cas avec et sans boucle de couplage, les résultats de précision et de temps de calcul. L'erreur est calculée à partir de la moyenne des valeurs obtenues pour les schémas avec et sans boucles, pour une valeur de pas de temps de  $\Delta/100$ , servant de référence. La figure 1.18 présente l'évolution des résultats en fonction du pas de temps choisi. Pour ce cas, pour une précision donnée, la méthode avec boucle de couplage est toujours plus efficace que la méthode sans boucle.



**FIGURE 1.18** – Zoom sur le premier maximum du déplacement. Les lignes en tirets représentent les valeurs obtenues avec la boucle pour les différents pas de temps. En traits plein, résultats sans la boucle. L'axe horizontal est donné en temps réduit.  $\Delta$  est choisi pour avoir au moins 30 points par pseudo-période.

**Autre effet** Ces résultats permettent aussi de constater que l'utilisation de la boucle interne permet de réduire l'amortissement numérique, même pour des pas de temps faibles. La figure 1.19 représente les résultats obtenus avec et sans boucle, mettant en évidence l'amortissement.



**FIGURE 1.19** – Tracé du déplacement sur toute la durée de la modélisation (cas centré,  $\Delta/2$ ). **Gauche** : pas de boucle interne, un amortissement numérique est constaté. **Droite** : boucle interne activée, pas d'amortissement constaté.

### 1.1.9 Perspective : couplage fort multi-maillages

Une approche courante pour le calcul des phénomènes couplés est basée sur la résolution simultanée des deux physiques (REN et al. 1995). Nous allons montrer que cette méthode de couplage fort, souvent utilisée à iso-maillage, peut être étendue aux maillages non conformes.

**Cas mono-maillage** Traitons le cas à maillage unique, on cherche à déterminer un équilibre magnéto-statique. Les systèmes linéaires de la mécanique et du magnétisme sont exprimés sous leur forme matricielle :

$$[M][X] = [S], \quad (1.14a)$$

$$[K][U] = [F]. \quad (1.14b)$$

Ce système est non-linéaire et couplé par les forces et l'évolution de la matrice  $[M]$  avec le déplacement. La méthode de Newton Raphson s'écrit, pour la  $i^{\text{ème}}$  itération :

$$\begin{bmatrix} M_i + \partial_X M_i X_i & \partial_U M_i X_i - \partial_U S_i \\ \partial_X K_i - \partial_X F_i & K_i + \partial_U K_i U_i - \partial_U F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i - M_i X_i \\ F_i - K_i U_i \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

avec  $[\delta X_i] = [X_{i+1}] - [X_i]$  et  $[\delta U_i] = [U_{i+1}] - [U_i]$ . On se place dans le cas où les sources ne sont pas impactées par le mouvement ( $[\partial_U S_i] = 0$ ). De plus, la loi de comportement mécanique est supposée invariante par rapport à l'état magnétique, ainsi  $[\partial_X K_i] = 0$ . Il reste à exprimer le terme  $[\partial_X F_i]$ , il peut être montré que (REN 1997 ; BESBES 1995) :

$$\partial_X F_i = -(X_i^\top \partial_U M_i^\top), \quad (1.16)$$

rendant de fait la matrice symétrique.

**Cas multi-maillages** Les méthodes de projections peuvent être représentées comme des matrices de passage entre les variables des différentes physiques. On note par un indice 1 les données relatives au maillage magnétique et par 2 celles relatives au maillage mécanique. Ces relations peuvent s'écrire :

$$[P_1][u_1] = [Q_{12}][u_2], \quad (1.17a)$$

$$[P_2][u_2] = [Q_{12}]^\top [u_1], \quad (1.17b)$$

où  $u_1$ ,  $u_2$  peuvent représenter le déplacement ou la densité de force. Si on considère les fonctions de forme du maillage magnétique ( $w_1^k$ ) et celles du maillage mécanique ( $w_2^k$ ), alors les termes élémentaires s'écrivent :

$$Q_{12_{jk}} = \int_{\mathcal{D}_{comm}} w_1^j w_2^k, \quad (1.18a)$$

$$P_{1_{jk}} = \int_{\mathcal{D}_{comm}} w_1^j w_1^k, \quad (1.18b)$$

$$P_{2_{jk}} = \int_{\mathcal{D}_{comm}} w_2^j w_2^k. \quad (1.18c)$$

Si on se réfère aux conditions de projections des forces, on remarque que la densité de force s'exprime :

$$[P_1][f_1] = [Q_{12}][f_2] = [F_1], \quad (1.19)$$

$$[P_2][f_2] = [Q_{12}]^\top [f_1] = [F_2]. \quad (1.20)$$

Ainsi les forces nodales peuvent être exprimées sur le maillage mécanique. La méthode de Newton-Raphson, avec simplification des termes s'écrit donc :

$$[M_{1_i} + \partial_{X_1} M_{1_i} X_{1_i}][\delta X_{1_i}] + [\partial_{U_1} M_{1_i} X_{1_i}][\delta U_{1_i}] = [S_{1_i} - M_{1_i} X_{1_i}], \quad (1.21)$$

$$[\partial_{X_2} F_{2_i}][\delta X_{2_i}] + [K_{2_i} + \partial_{U_2} K_{2_i} U_{2_i}][\delta U_{2_i}] = [F_{2_i} - K_{2_i} U_{2_i}], \quad (1.22)$$

où la première ligne représente le modèle magnétique et la seconde le problème mécanique. Il faut traiter les termes de couplages afin de les exprimer en fonction des inconnues du maillage réciproque. Le bloc supérieur est exprimé ainsi :

$$[\partial_{U_1} M_{1_i}][X_{1_i}][\delta X_{1_i}] = [\partial_{U_1} M_{1_i}][X_{1_i}][P_1]^{-1}[Q_{12}][\delta X_{2_i}]. \quad (1.23)$$

Le bloc inférieur est traité de manière à faire apparaître la transposée du bloc supérieur :

$$\begin{aligned} -[\partial_{X_2} F_{2_i}][\delta X_{2_i}] &= -[\partial_{X_1} F_{2_i}][\partial_{X_2} X_{1_i}][\delta X_{2_i}] \\ &= -[\partial_{X_1} F_{2_i}][P_1^a]^{-1}[Q_{12}^a][\delta X_{2_i}] \\ &= -[\partial_{X_1} F_{2_i}][\delta X_{1_i}] \\ &= -[Q_{12}]^\top [P_1^{-1}][\partial_{X_1} F_{1_i}][\delta X_{1_i}] \\ &= [Q_{12}]^\top [P_1^{-1}][X_{1_i}]^\top [\partial_{U_1} M_{1_i}]^\top [\delta X_{1_i}]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$[P_1^a]$  et  $[Q_{12}^a]$  sont les matrices, pour les éléments d'arêtes, équivalentes à  $[P_1]$  et  $[Q_{12}]$ . Or la matrice  $[P_1]$  est symétrique, ainsi  $[P_1^{-1}] = [P_1^{-\top}]$ . Le terme précédent est donc le symétrique de celui défini à l'équation 1.20. Le système global peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} M_{1_i} + \partial_{X_1} M_{1_i} X_{1_i} & \partial_{U_1} M_{1_i} X_{1_i} P_1^{-1} Q_{12} \\ (\partial_{U_1} M_{1_i} X_{1_i} P_1^{-1} Q_{12})^\top & K_{2_i} + \partial_{U_2} K_{2_i} U_{2_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_{1_i} \\ \delta U_{2_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta S_{1_i} - M_{1_i} X_{1_i} \\ \delta F_{2_i} - K_{2_i} U_{2_i} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

La matrice ainsi obtenue est symétrique, facilitant de fait son stockage et permettant aussi d'utiliser des solveurs traditionnels. La séparation des maillages ne requiert que l'ajout des termes  $[P_1^{-1}Q_{12}]$  dans les blocs extra-diagonaux.

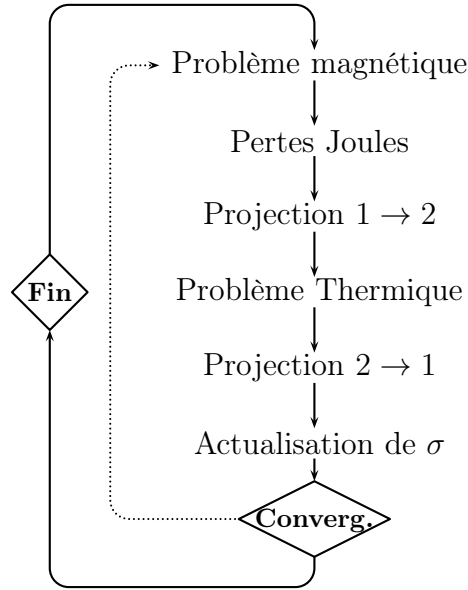
## 1.2 Couplage Magnéto-thermique

La genericité des méthodes de projections permet d'appliquer la méthode de couplage faible à d'autres types de modèles. Ce paragraphe détaille la prise en compte des effets magnéto-thermiques. Ce couplage diffère, par rapport au cas magnéto-mécanique, dans le sens où la grandeur de couplage température n'est plus une source de l'autre problème mais influe sur les lois de comportement. Dans ce qui suit, on suppose par exemple qu'une loi de comportement est susceptible de varier.

Nous allons présenter la méthode générale de couplage et un cas test permettant de valider le fonctionnement du schéma choisi.

### 1.2.1 Principe

Le schéma de couplage est semblable à celui présenté au paragraphe 1.1.8 ; le transfert des pertes Joule étant réalisé à l'aide d'éléments de volumes et la température étant représentée à l'aide d'éléments nodaux. Nous avons vu dans le paragraphe 1.3 que les méthodes utilisant des éléments de volumes sont équivalentes et parfaitement conservatives, ainsi la puissance de chauffe est conservée sur chaque élément. Le maillage n'a pas à être actualisé, mais il faut cependant actualiser les propriétés des matériaux. La figure 1.20 présente le détail de la boucle.



**FIGURE 1.20** – Principales étapes utilisées pour le calcul du problème couplé.

### 1.2.2 Cas test analytique

#### Description

On considère une pastille conductrice, soumise à une différence de potentiel imposée, chauffée par les pertes Joule engendrées par le passage du courant (voir la figure 1.21). La conductivité varie exponentiellement avec la température, des pertes latérales sont modélisées par une loi de Newton :

$$\sigma = \sigma_0 e^{(T-T_a)/\theta}, \quad (1.26a)$$

$$\Phi_l = h(T - T_a), \quad (1.26b)$$

produisant un problème fortement couplé.

Paramètres		
$R = 1 \text{ m}$	$H = 1 \text{ m}$	$V = 84,8528 \text{ V}$
$\rho C_p = 50 \text{ kJK}^{-1}\text{m}^{-3}$	$h = 50 \text{ Wm}^2$	$\lambda = 100 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\sigma_0 = 0,4437 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	$T_a = 20^\circ\text{C}$	$\theta = 50 \text{ K}$

**TABLE 1.6** – Paramètres utilisés pour le problème magnéto-thermique.

L'objectif est de déterminer la distribution de température au sein de la pastille. Les différents paramètres sont reportés dans la table 1.6 où  $V$  est la tension imposée,  $\rho C_p$  est la capacité thermique, et  $\lambda$  est la conductivité thermique. Deux maillages d'étendues topologiques différentes sont utilisés (voir figure 1.22). Les pertes Joule sont calculées à partir de la valeur de  $\sigma|J|^2$ , constante par élément. Il existe une solution analytique à ce problème (RICHARD et DUCREUX 1997), pour laquelle la température au centre du cylindre doit être de  $65,89^\circ\text{C}$ , et sur les surfaces latérales de  $56,36^\circ\text{C}$ . Les maillages sont présentés en figure 1.22.

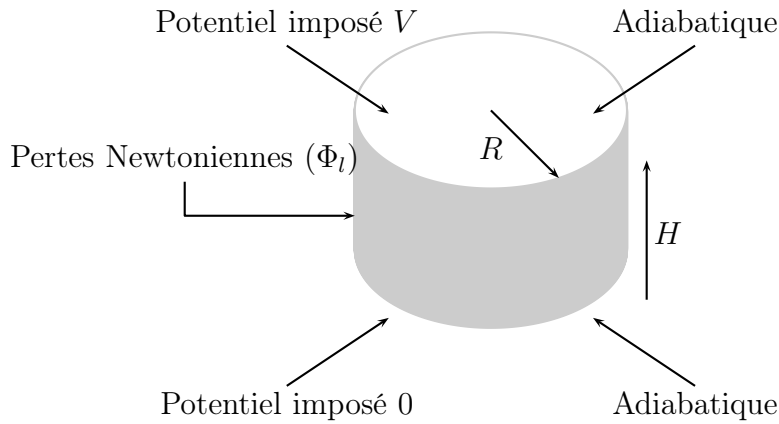


FIGURE 1.21 – Schéma du cas considéré et grandeurs associées.

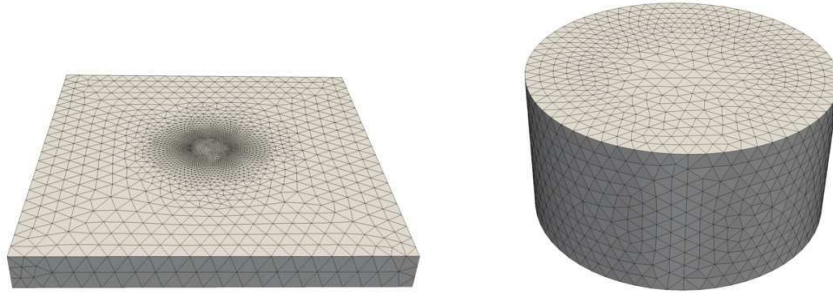


FIGURE 1.22 – *Gauche* : maillage magnétique avec le conducteur au centre et la boîte d'air. *Droite* : maillage thermique.

### Application numérique

On se propose de tester le schéma de couplage pour différentes méthodes de transfert de la température (interpolation, projection localement conservative, projection  $\mathcal{L}^2$ ). Les résultats obtenus sont reportés dans la table 1.7, et un tracé des

distributions des températures est reporté sur la figure 1.23. On peut constater que, sous réserve d'utilisation des méthodes de transfert appropriées, ce type de problème peut être traité par un couplage faible à maillages multiples. De part la forte sensibilité de la solution à la qualité de transferts, la méthode d'interpolation (non conservative) n'est pas adaptée.

	Référence		Interpolation		Cons. / Orth.	
	Centre	Latéral	Centre	Latéral	Centre	Latéral
Température (°C)	65,89	56,36	53,63	46,11	65,56	56,06
Erreur (%)	—	—	18,6%	18,2%	0,5%	0,5%

TABLE 1.7 – Erreurs sur les températures pour les différentes méthodes.

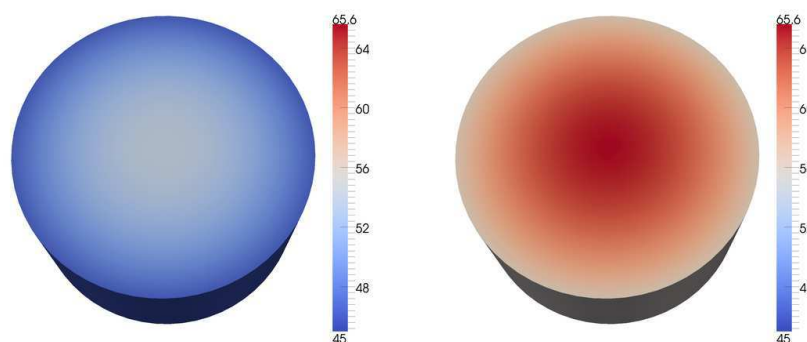


FIGURE 1.23 – *Gauche* : distribution de température obtenue à l'état final par la méthode d'interpolation. *Droite* : distribution pour les méthodes conservatives locales et de projection orthogonale.

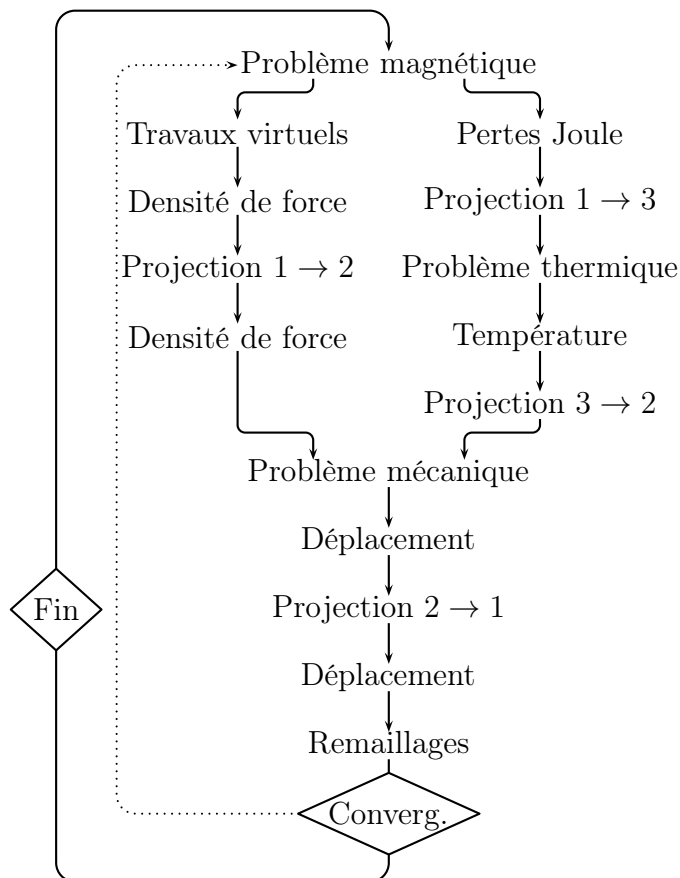
## 1.3 Couplage magnéto-thermo-mécanique

### 1.3.1 Principe

Trois types de physiques sont considérés, chacun ayant son propre maillage. Le principe sous-jacent reste le même : une résolution successive des problèmes associés à chaque physique est nécessaire. La prise en compte des phénomènes de couplage est assurée à chaque pas de temps par une boucle de type prédiction



/ correction. La qualité globale du modèle dépend essentiellement des grandeurs de couplage utilisées et des méthodes de transferts associées à chacune d'elles. Le schéma global utilisé est présenté en figure 1.24.



**FIGURE 1.24** – Étapes du couplage magnéto-thermo-mécanique. Le maillage magnétique est noté 1, le mécanique 2 et le thermique 3.

### 1.3.2 Cas test statique

#### Description

YUAN (1972) a présenté un cas test magnéto-thermo-élastique analytique. Cet exemple est proche, par sa structure, de celui présenté au paragraphe 1.1.6, mais avec une dépendance supplémentaire de la loi de comportement mécanique avec la température (coefficient de dilatation thermique  $k$ ). La structure géométrique du cas est la même que celle présentée en figure 1.10, les paramètres géométriques étant les mêmes qu'en partie 1.1.6. Les grandeurs non géométriques sont reportées

dans la table 1.8. La solution analytique de la contrainte radiale est donnée par :

$$\sigma_{rr} = \frac{-\mu_0 I^2}{16 \pi^2 R^2} \left( \frac{\nu}{3 - 2\nu} + \frac{\alpha E}{\mu_0 k \sigma_m (1 - \nu)} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (1.27)$$

et un bilan thermique donne une température de surface  $T_{sur}$  égale à :

$$T_{sur} = T_{ext} + \frac{I^2}{2\pi^2 h \sigma R^3}, \quad (1.28)$$

où  $T_{ext}$  est la température extérieure. L'application numérique donne une contrainte  $\sigma_{rr} = -34,82.10^{-3}$  Pa et une température de surface latérale de  $T_{sur} = 24,22^\circ\text{C}$ .

$\mu = \mu_0$	$I = 1 \text{ A}$
$E = 1 \text{ Pa}$	$\nu = 0.3$
$k = 10^{-5} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\sigma_m = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
$\alpha = 5, 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$h = 2.10^{-1} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}$
$T_{ext} = 20^\circ\text{C}$	$R = 1 \text{ mm}$

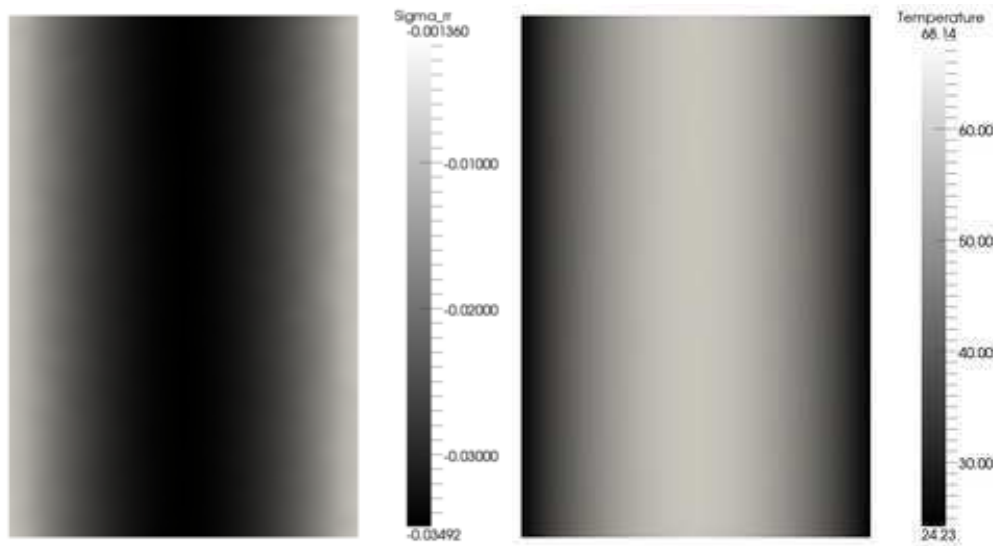
**TABLE 1.8** – Paramètres utilisés, et valeurs associées, pour le cas test analytique.

### Application numérique

Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 1.9, un tracé des distributions de contraintes radiales et de température est reporté sur la figure 1.25. On constate que la qualité du modèle dépend de chacun des transferts réalisés. Les conclusions sont une combinaison des remarques données aux paragraphes 1.1.7 et 1.2.2. Ainsi nous avons choisi de coupler les problèmes magnétique et mécanique à l'aide d'une projection nodale  $\mathcal{L}^2$  de la densité de force, les problèmes magnétique et thermique sont couplés à l'aide d'interpolation d'éléments de volume, et les problèmes thermique et mécanique sont couplés à l'aide d'une projection  $\mathcal{L}^2$  de la température.

Grandeur projetée	Produit	Type	Valeur	Erreur relative (%)
			$10^{-3}$	
Aucune (maillage unique)	–	$T_l$	24,21	0,04
Aucune (maillage unique)	–	$\sigma_{rr}$	34,58	0,69
Température ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	$T_l$	24,28	0,25
Forces ( $A$ )	$\mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	34,78	0,11
Potentiel, $A$	$\mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	27,42	21,25
Potentiel, $A$	$\mathcal{H}^1$	$\sigma_{rr}$	34,57	0,72
Induction, $B$	$\mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	34,56	0,75
Induction, $B$	$\mathcal{H}^1$	$\sigma_{rr}$	32,89	5,54
Température ( $\Omega$ )	$\mathcal{L}^2$	$T_l$	24,28	0,25
Forces ( $\Omega$ )	$\mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	35,01	0,55
Potentiels, $\Omega$ & $H_g$	$\mathcal{H}^1, \mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	19,24	44,74
Champ, $H$	$\mathcal{L}^2$	$\sigma_{rr}$	25,28	27,40
Champ, $H$	$\mathcal{H}^1$	$\sigma_{rr}$	22,92	34,18

**TABLE 1.9** – *Test de précision pour le couplage magnéto-thermo-mécanique.*



**FIGURE 1.25** – *Gauche : Distribution des contraintes radiales dans le plan. Droite : Distribution de la température.*

### 1.3.3 Exemple dynamique

Ce paragraphe considère un cas temporel dynamique à trois physiques. Il s'agit d'une démonstration de faisabilité, nous n'avons malheureusement pas trouvé de cas analytiques associés.

#### Description du cas

On considère un bilame ferromagnétique et conducteur  $(\mu, \sigma)$  placé devant un électro-aimant alimenté par un courant sinusoïdal (amplitude). Les deux matériaux formant le bilame ont des coefficients de dilatation thermiques opposés ( $\alpha_{\text{haut}} = \|\alpha\|$  et  $\alpha_{\text{bas}} = -\|\alpha\|$ ). La plaque est donc soumise aux forces magnétiques ainsi qu'aux contraintes issues de l'hétérogénéité des matériaux chauffés par les courants induits. Le problème thermique est paramétrisé par la conduction thermique  $k$ , la capacité thermique  $\rho \cdot Cp$  et les pertes Newtoniennes de coefficient  $h$ . Le modèle mécanique est celui de l'élasticité linéaire (module d'Young  $E$ , coefficient de poisson  $\nu$  et masse volumique  $\rho$ ).

Le système est initialement considéré comme au repos, non alimenté, et soumis à une température uniforme de 20°C. À  $t = 0$  le système est alimenté par un courant sinusoïdal, et ce jusqu'au pas de temps d'indice 1000. Par la suite, l'excitation électrique est stoppée. On cherche à déterminer la valeur au cours du temps de la position de la plaque, un amortissement de Rayleigh est par ailleurs ajouté :  $[C] = \alpha_{\text{Ray}}[K] + \beta_{\text{Ray}}[M]$ . L'ensemble des paramètres utilisés est reporté dans les tables 1.10 et 1.11. La figure 1.26 présente le schéma du cas considéré.

**Maillages** Trois maillages sont utilisés :

- le maillage magnétique comprend la plaque, l'électro-aimant et l'air environnant. Le maillage est composé de 378 000 tétraèdres linéaires ;
- le maillage thermique est composé de 127 000 tétraèdres linéaires, mais n'est composé que de la plaque sans distinction des deux moitiés ;
- le maillage mécanique est composé de tétraèdres quadratiques, les deux moitiés du bilame sont explicitement identifiées.

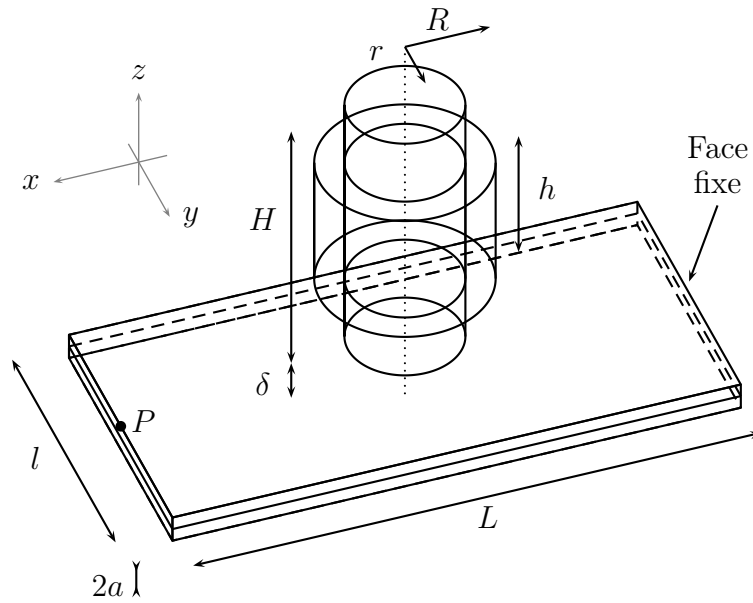


FIGURE 1.26 – Détail et paramètres du bilame modélisé.

$L$	20	$l$	10 A
$a$	0,5 MPa	$\delta$	1
$h$	5	$H$	10
$r$	2	$R$	3
$L_{\text{air}}$	60		

TABLE 1.10 – Paramètres géométriques du système. Les distances sont données en mètres.

$\mu_r$	1000	$I$	1 A
$E$	1 MPa	$\nu$	0,3
$\rho$	1 kg.m <sup>-3</sup>	$\rho.Cp$	3,3.10 <sup>-3</sup> J.K <sup>-1</sup> .m <sup>-3</sup>
$\ \alpha\ $	2.10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>	$h$	2.10 <sup>-1</sup> W.m <sup>-2</sup> .K
$T_{\text{ext}}$	20°C	$k$	10 <sup>-5</sup> W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$\alpha_{\text{Ray}}$	1	$\beta_{\text{Ray}}$	1

TABLE 1.11 – Paramètres physiques du bilame.

## Résultats numériques

Pour un point donné, si les effets mécaniques sont négligés (déplacement ignoré), l'équation d'évolution de la température est :

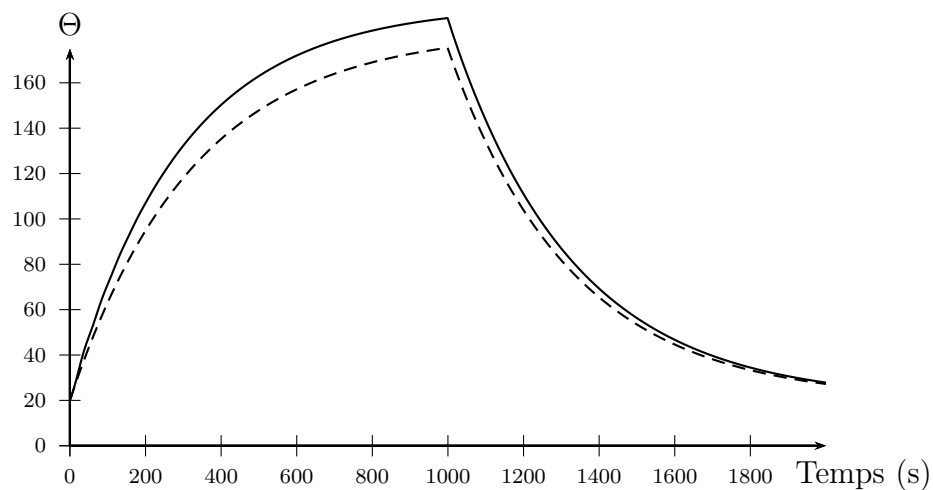
$$k \Delta T(t) + s = \rho C_p \partial_t T(t), \quad (1.29)$$

où la seule variable est  $t$ . La solution est alors de la forme  $T = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . Dans notre cas, lorsque la plaque est attirée par l'électro-aimant, la norme de l'induction magnétique tend à augmenter. Les pertes Joule augmentent en conséquence. La figure 1.27 présente l'évolution de la température au centre du bilame pour le cas avec mouvement et le cas sans mouvement. La différence de température peut aller jusque 15°C, ce qui peut représenter une erreur de 10% si le couplage magnéto-mécanique n'est pas pris en compte.

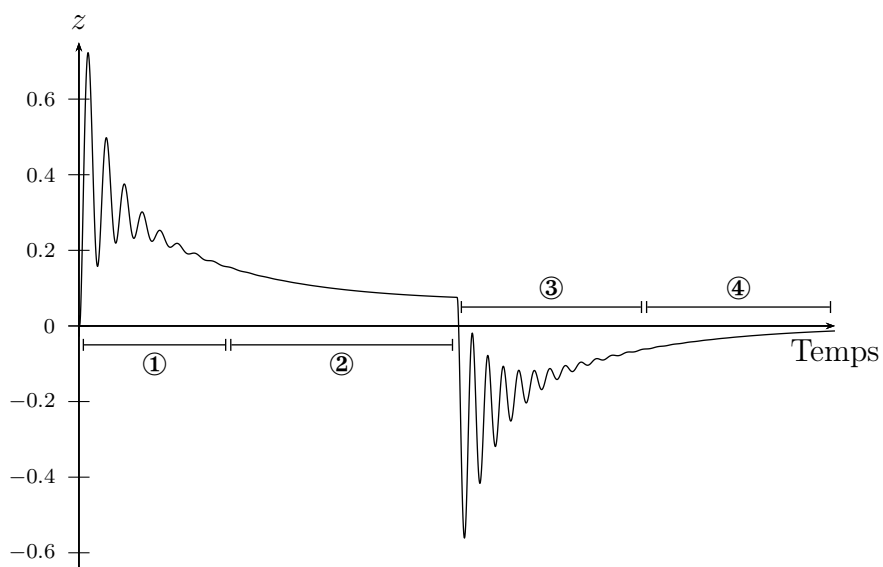
La figure 1.28 représente l'évolution du déplacement du point  $P$  sur toute la durée de la modélisation. On peut alors identifier plusieurs phases :

- le premier transitoire (①) est dû à la soudaine apparition de force d'attraction magnétique. Les oscillations sont dues à l'inertie de la plaque, et sont amorties par la présence d'amortissement quadratique. Il a été choisi, pour la facilité d'interprétation, d'avoir un transitoire mécanique environ quatre fois plus court que le transitoire thermique ;
- la phase ② représente la progressive inclinaison de la plaque due à l'échauffement de celle-ci. Malgré la ressemblance avec une exponentielle, la variation de la position prend en compte la décroissance des sources dues à l'éloignement progressif. Cet état est poursuivi atteignant presque l'état stationnaire.
- la phase ③ est le transitoire mécanique dû à la soudaine disparition des forces magnétiques. Le bilame se tord spontanément dans le sens opposé à cause des contraintes internes résiduelles dues aux matériaux de coefficients de dilatation différents.
- le bilame revient progressivement sa position initiale au fur et à mesure que la température décroît. La phase ④ est un refroidissement simple.

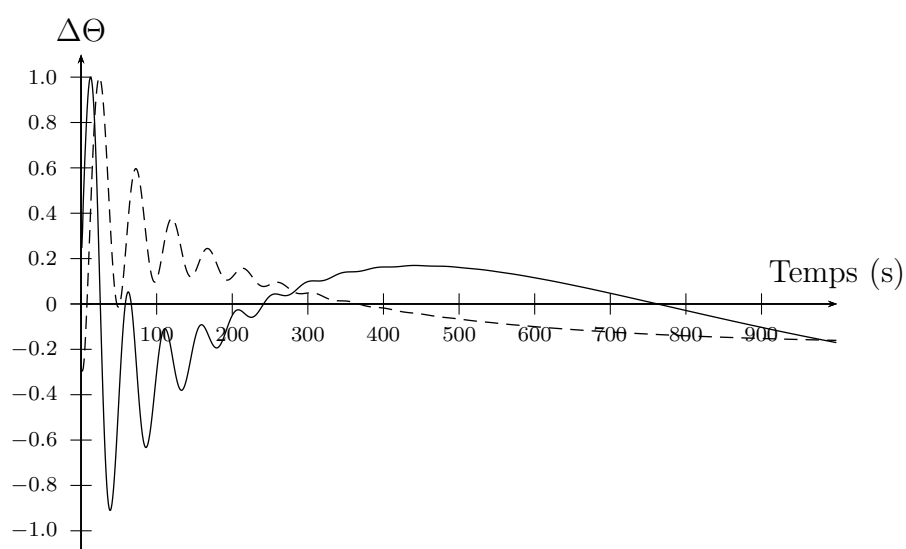
Il est aussi intéressant de comparer la variation effective de la température avec un profil d'exponentielle. La figure 1.29 présente, sur un même graphique, le déplacement (normalisé) et la différence (normalisée) entre la température mesurée et l'exponentielle idéale issue de la méthode des moindres carrés. On montre que cette différence présente des oscillations déphasées de  $\pi/2$  à cause de la dérivée en temps de la température présente dans l'équation de la chaleur (partie I, chapitre 3).



**FIGURE 1.27** – *Trait plein* : température au centre du bilame (avec mouvement). *Tirets* : tracé de la température pour le cas sans mouvement.



**FIGURE 1.28** – Tracé du déplacement vertical du point  $P$  (voir la figure 1.26).



**FIGURE 1.29** – *Trait plein* : tracé de la différence normalisée entre la température réelle et la courbe exponentielle (cherchée au sens des moindres carrés) *Tirets* : valeur normalisée du déplacement, on observe bien le déphasage de  $\pi/2$ .





## Conclusion générale



Cette thèse aborde la problématique de la modélisation multiphysique en génie électrique, avec une application à l'étude des vibrations d'origine électromagnétique des cages de développantes. Afin de déterminer une distribution correcte de forces magnétiques, une bonne description et imposition du courant est nécessaire. Cette opération est effectuée en deux étapes : la construction de la densité de courant et l'annulation de la divergence. De part la structure complexe l'imposition du courant ne peut pas toujours être réalisée à l'aide de méthodes analytiques. Une méthode basée sur une résolution électrocinétique ainsi qu'une méthode purement géométrique sont testées. Cette dernière donne des résultats plus proches de la densité de courant réelle.

Les méthodes de calcul de forces sont nombreuses, et seules les méthode des travaux virtuels et des forces de Laplace sont étudiées, car considérées par la littérature comme les plus adaptées. Les forces de Laplace sont particulièrement précises, mais ne sont pas valables si la perméabilité n'est plus homogène. La méthode des travaux virtuels est préférée car elle est applicable de manière universelle.

Afin de modéliser des problèmes multi-physiques complexes à l'aide de plusieurs codes de calculs dédiés, des méthodes de transferts entre maillages non conformes sont développées. Nous avons comparé les procédures d'interpolations, les méthodes localement conservatives et les projections orthogonales. Les méthodes d'interpolations sont réputées rapides mais très diffusives tandis que les méthodes de projections sont considérées comme les plus précises. La méthode localement conservative peut être vue comme produisant des résultats comparables aux méthodes de projections, mais évite l'assemblage et la résolution de systèmes linéaires.

Enfin, la modélisation des problèmes multi-physiques est abordée à l'aide des méthodes de transferts de solutions. L'assemblage d'un schéma de couplage n'est pas unique car, pour un même problème, plusieurs ensembles de transferts et de grandeurs physiques peuvent être considérés. Des tests à l'aide de cas tests analytiques sont réalisés afin de déterminer, pour plusieurs types de couplages, les stratégies les plus appropriées. Une application à la modélisation magnéto-mécanique des cages de développantes est présentée.

## Perspectives

### Application aux cages de développantes

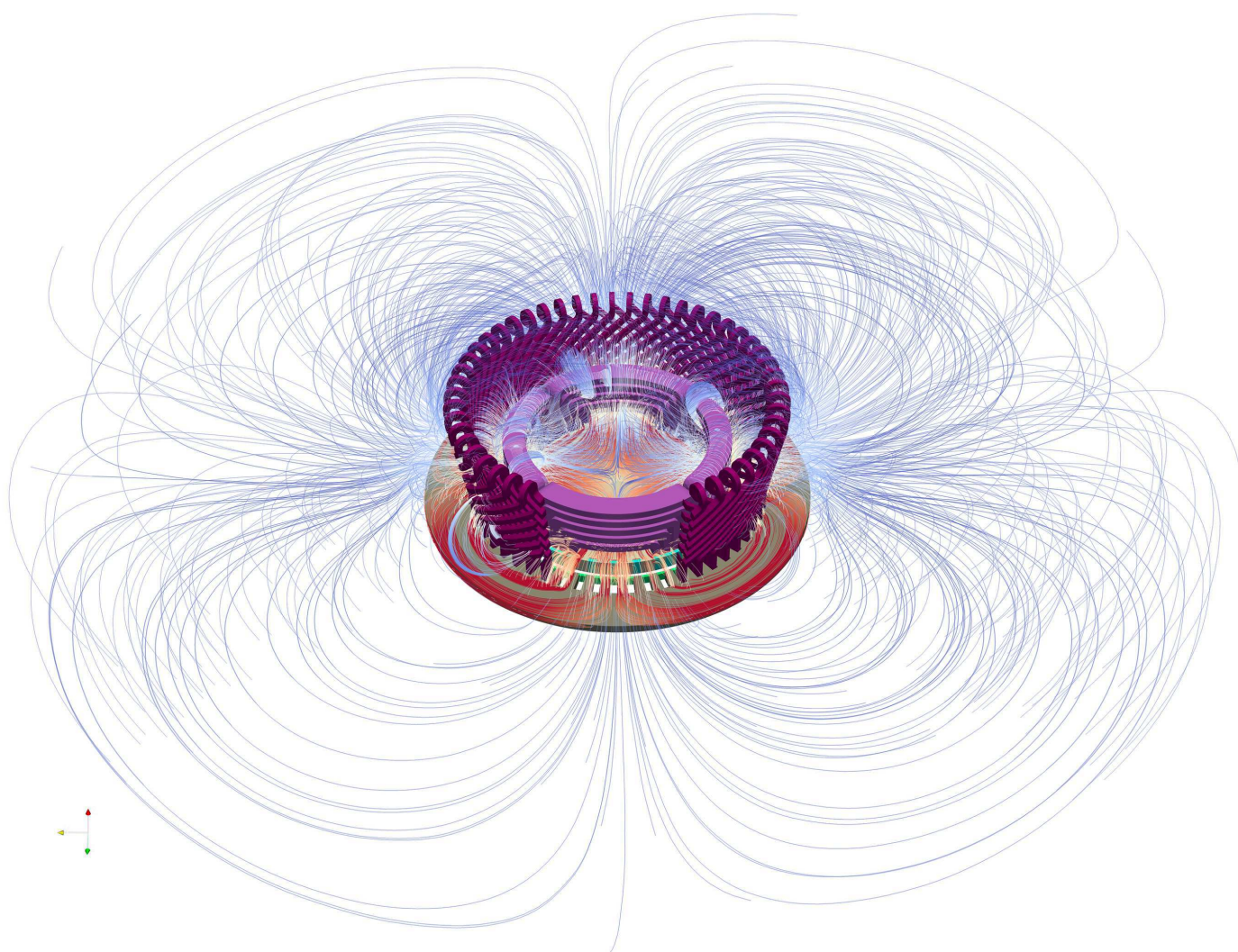
Les différents travaux issus de cette thèse permettent la modélisation tridimensionnelle des cages de développantes. Nous présentons pour exemple de calcul : la structure tridimensionnelle est présentée sur la figure 1.30. Un résultat de calcul magnéto-mécanique appliqué aux cages de développantes est présenté sur les figures 1.30 et 1.31. Le maillage magnétique est composée de la cages complète, du rotor et d'une boîte d'air, alors que le maillage mécanique n'est composé que des conducteurs. La figure 1.30 présente les lignes de champs obtenues à l'issue du calcul magnétique. La figure 1.31 présente une déformée obtenue à l'issue du calcul mécanique, la structure du stator et le rotor ne font en réalité pas partie du modèle mécanique.

L'exploitation complète des résultats de modélisation est en cours. Des résultats de calculs sont disponibles pour une position du rotor donnée, cependant l'étude des phénomènes de vibrations n'est pas possible sans la donnée du champ de forces pour l'ensemble des positions du rotor. Une fois la variation des forces avec la position du rotor connue, il est intéressant de vérifier la compatibilité d'une telle excitation avec les modes propres de la structure des cages de développantes. On peut être en mesure de déterminer si les modes sont effectivement excités ou non.

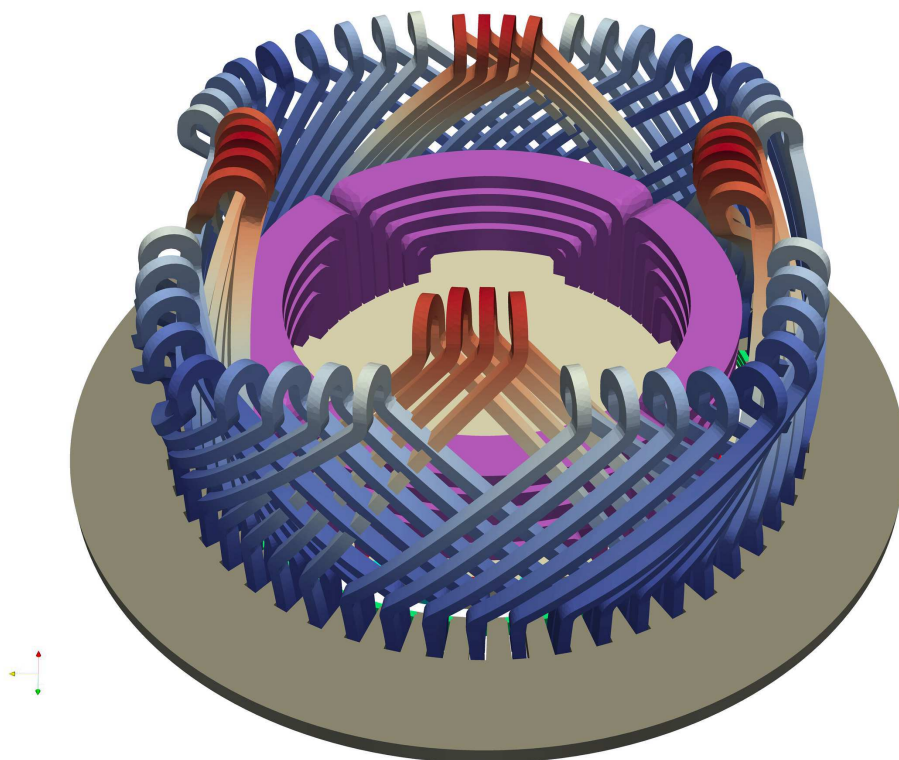
### Exploitation des résultats

De tels calculs numériques n'ont de sens que si les paramètres géométriques et les caractéristiques des matériaux sont connus. La comparaison des résultats aux mesures relevées sur des alternateurs réels peuvent permettre d'améliorer le modèle par ajustement des paramètres physiques.

Une fois les modèles représentatifs de la réalité, il est envisageable de les utiliser pour déterminer les vibrations d'une structure donnée en évitant de coûteuses opérations d'arrêt et d'instrumentations. Les modèles de cages de développantes pourront aussi servir à des études paramétriques permettant de trouver, avec un nombre réduit de tests réels, des solutions efficaces pour la réduction des vibrations des alternateurs.



**FIGURE 1.30** – Résultat de calcul pour une extrémité d’alternateur à angle interne nul. Le rotor est pris en compte et alimenté.



**FIGURE 1.31** – Tracé des déplacements des développantes à l'issu du calcul de mécanique. Pour ce cas, le mode 4 est prépondérant.

# ANNEXES

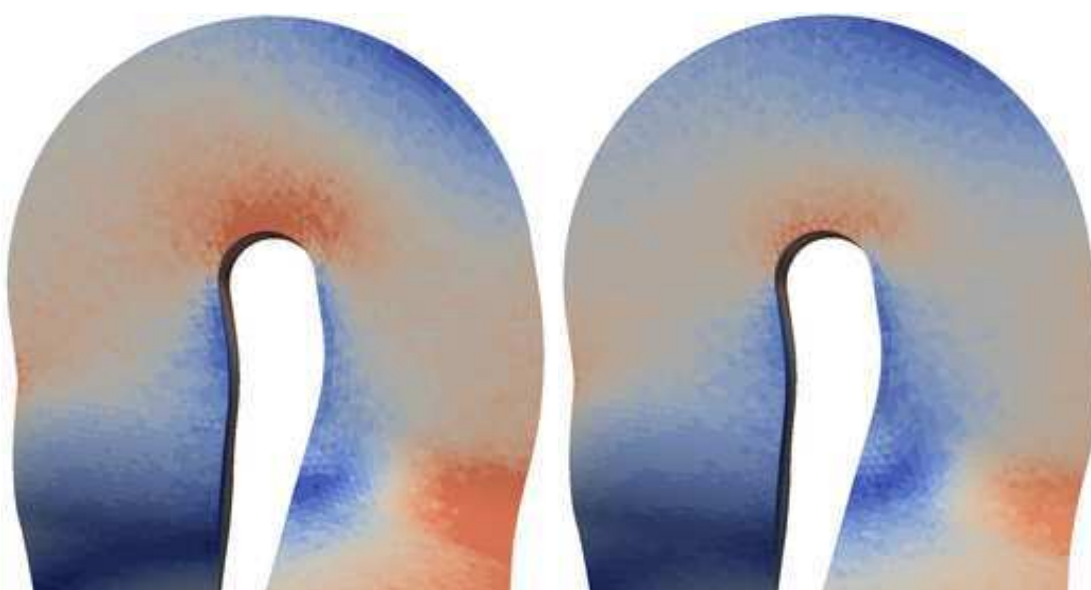




## Annexe A

# Influence de la distribution du courant sur les contraintes mécaniques

La figure A.1 présente les contraintes appliquées au coude dans le cas d'une résolution électrocinétique et dans le cas à courant uniformément réparti. Bien que le tracé de la somme des normes du tenseur des contraintes n'ait pas de signification physique, cette dernière figure montre que la répartition et la valeur des forces appliquées diffèrent. La répartition du courant source a donc une influence complexe sur la répartition finale des contraintes. Pour chacune des figures 3.4 et A.1, l'échelle n'est pas représentée : les modèles utilisés étant linéaires, la répartition des solutions ne varie pas avec la norme des sources imposées.



**FIGURE A.1** – Exemples de répartitions des contraintes totales pour le coude supérieur de la développante. **Gauche** : Résolution électrocinétique (voir figure 1.4). **Droite** : Courant source uniforme.

## Annexe B

# Application de la méthode des travaux virtuels

La méthode des travaux virtuels repose sur la dérivation partielle locale de l'énergie ou de la coénergie magnétique par rapport au déplacement. Les flux de  $\mathbf{B}$  ou les circulations de  $\mathbf{H}$  doivent être maintenus constants, ceci est assuré dès lors que l'on utilise une expression de l'énergie avec  $\mathbf{B}$  uniquement (avec  $\mathbf{H}$  respectivement pour la coénergie).

### B.1 Discrétisation

Il est donc préférable d'utiliser l'expression de l'énergie avec une formulation électrique,  $\mathbf{B}$  s'exprime donc avec des éléments de  $H^2$  :

$$\mathbf{B} = \sum_{\{Noeuds\}} b_i \mathbf{w}_f^i = \mathbf{W}_f \bar{b} \quad (\text{B.1})$$

De même pour l'expression de la coénergie, on utilisera le champ magnétique  $\mathbf{H}$  exprimé à l'aide des fonctions d'interpolation d'arêtes comme suit :

$$\mathbf{H} = \sum_{\{Artes\}} h_i \mathbf{w}_e^i = \mathbf{W}_e \bar{h} \quad (\text{B.2})$$

On peut alors réinjecter ces expressions dans le calcul de  $\Psi$  et de  $\Phi$ . On se contentera dans un premier temps de l'expression pour des matériaux linéaires,

homogènes et isotropes :

$$\begin{aligned}\Phi(u, \mathbf{B}) &= \int_{\Omega} \frac{\nu}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \\ \Psi(u, \mathbf{H}) &= \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}\end{aligned}\tag{B.3}$$

## B.2 Dérivation de la Jacobienne

### B.2.1 Cas de la coénergie magnétique

On remplace l'expression des champs par leurs valeurs interpolées. Seuls les tétraèdres entourant le noeud apportent une contribution, on exprime l'intégrale tétraèdre par tétraèdre :

$$\Psi(u, \bar{h}) = \bar{h}^T \int_K \frac{\mu}{2} \mathbf{W}_e^T \mathbf{W}_e \bar{h}$$

La force revient à réaliser la dérivation d'une matrice définie comme :

$$\mathbf{F}_u = \frac{1}{2} \bar{h}^T \partial_u \mathbf{M} \bar{h} \qquad \mathbf{M} = \int_K \mu \mathbf{W}_e^T \mathbf{W}_e$$

Si on se place dans le tétraèdre de référence, les fonctions de formes  $\widehat{\mathbf{w}}_e^i$  ne dépendent plus de la transformation de l'espace. Seule la matrice jacobienne en dépend. La force revient à réaliser la dérivation d'une matrice définie comme :

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{J}^{-1} \widehat{\mathbf{w}}_e \qquad \mathbf{M}_{ij} = \int_{\widehat{K}} \mu \widehat{\mathbf{W}}_e^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} \widehat{\mathbf{W}}_e \det \mathbf{J}$$

La dérivée de la matrice est par conséquent :

$$\partial_u \mathbf{M} = \int_{\widehat{K}} \mu \widehat{\mathbf{W}}_e^T [\partial_u (\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}) \det \mathbf{J} + (\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}) \partial_u \det \mathbf{J}] \widehat{\mathbf{W}}_e$$

*Matrice Jacobienne* : Celle-ci s'exprime comme le produit du gradient des fonc-

tions de formes nodales par la matrice des coordonnées des noeuds.

$$\mathbf{J} = \nabla \hat{\boldsymbol{\lambda}} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

On développe :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

*Dérivée de la matrice Jacobienne* : Le cas est décomposé suivant le  $i$ -ème nœud considéré et suivant la direction de dérivation  $k$  selon  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

$$\partial_{(i,k)} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{i1} \delta_{kx} & \delta_{i1} \delta_{ky} & \delta_{i1} \delta_{kz} \\ \delta_{i2} \delta_{kx} & \delta_{i2} \delta_{ky} & \delta_{i2} \delta_{kz} \\ \delta_{i3} \delta_{kx} & \delta_{i3} \delta_{ky} & \delta_{i3} \delta_{kz} \\ \delta_{i4} \delta_{kx} & \delta_{i4} \delta_{ky} & \delta_{i4} \delta_{kz} \end{bmatrix}$$

*Dérivée du déterminant* : Le principe ici est de montrer que les dérivées successives du déterminant suivant  $(x, y, z)$  sont simples si développées dans le bon ordre. Développons suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= +(x_2 - x_1)[(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (y_4 - y_1)(z_3 - z_1)] \\ &= -(x_3 - x_1)[(y_2 - y_1)(z_4 - z_1) - (y_4 - y_1)(z_2 - z_1)] \\ &= +(x_4 - x_1)[(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)] \end{aligned}$$

La dérivation par rapport à  $x$  est aisée et ne s'applique que sur les termes en facteurs :

$$\partial_x \det \mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix} \right]$$

Il en est de même pour la dérivation dans la direction  $y$  et  $z$  en développant suivant la deuxième et troisième ligne. En somme :

$$\partial_x \det \mathbf{J} = \partial_x \mathbf{X} \cdot (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) \quad \partial_y \det \mathbf{J} = \partial_y \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{Z} \times \mathbf{X}) \quad \partial_z \det \mathbf{J} = \partial_z \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

*Dérivation de  $\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}$  :* on décompose en deux termes.

$$\partial_u (\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}) = \partial_u \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \partial_u \mathbf{J}^{-1}$$

Avec :

$$\partial_u (\mathbf{J} \mathbf{J}^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} \partial_u \mathbf{J}^{-1} = -\partial_u \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \partial_u \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}^{-1} \partial_u \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1}$$

Par passage à la transposée :

$$\partial_u \mathbf{J}^{-T} = -\mathbf{J}^{-T} (\partial_u \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T}$$

On peut maintenant combiner ces différents éléments. Il vient :

$$\begin{aligned} \partial_u (\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}) &= \partial_u \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \partial_u \mathbf{J}^{-1} \\ &= -[\mathbf{J}^{-T} (\partial_u \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1} (\partial_u \mathbf{J}) \mathbf{J}^{-1}] \\ &= -\mathbf{J}^{-T} [(\partial_u \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T} + \mathbf{J}^{-1} (\partial_u \mathbf{J})] \mathbf{J}^{-1} \end{aligned}$$

*Dérivée de la matrice  $\mathbf{M}$  :* On décompose le cas suivant la direction de dérivation,

$$\begin{aligned} \partial_{xyz} \mathbf{M} &= \int_{\hat{K}} \mu \widehat{\mathbf{W}}_e^T [\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1}] [\partial_{xyz} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \widehat{\mathbf{W}}_e \\ &\quad - \int_{\hat{K}} \mu \widehat{\mathbf{W}}_e^T \mathbf{J}^{-T} [(\partial_{xyz} \mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T} + \mathbf{J}^{-1} (\partial_{xyz} \mathbf{J})] \mathbf{J}^{-1} \det \mathbf{J} \widehat{\mathbf{W}}_e \end{aligned}$$

Soit, dans l'élément réel :

$$\begin{aligned} \partial_{xyz} M = & \int_K \frac{\mu}{\det J} \mathbf{W}_e^T [\partial_{xyz} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{W}_e \\ & - \int_K \mu \mathbf{W}_e^T [(\partial_{xyz} J)^T J^{-T} + J^{-1} (\partial_{xyz} J)] \mathbf{W}_e \end{aligned} \quad (B.6)$$

Avec :

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \quad xyz = x \quad (B.7)$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) \quad xyz = y \quad (B.8)$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad xyz = z \quad (B.9)$$

### B.2.2 Cas de l'énergie magnétique

On remplace l'expression des champs par leurs valeurs interpolées. Seuls les tétraèdres entourant le nœud apportent une contribution, on exprime l'intégrale tétraèdre par tétraèdre :

$$\Phi(u, \bar{b}) = \bar{b}^T \int_K \frac{\nu}{2} \mathbf{W}_f^T \mathbf{W}_f \bar{b}$$

La force revient à réaliser la dérivation d'une matrice définit comme :

$$\mathbf{F}_u = -\frac{1}{2} \bar{b}^T \partial_u \mathbf{N} \bar{b} \quad \mathbf{N} = \int_K \nu \mathbf{W}_f^T \mathbf{W}_f$$

Si on se place dans le tétraèdre de référence, les fonctions de formes  $\widehat{\mathbf{w}}_f^i$  ne dépendent plus de la transformation de l'espace. Seule la matrice jacobienne en dépend. La force revient à réaliser la dérivation d'une matrice définit comme :

$$\mathbf{w}_f = \frac{J^T}{\det J} \widehat{\mathbf{w}}_f \quad \mathbf{N} = \int_{\hat{K}} \frac{\nu}{\det J} \widehat{\mathbf{W}}_f^T J J^T \widehat{\mathbf{W}}_f$$

La dérivée de la matrice est par conséquent :

$$\partial_u \mathbf{N} = \int_{\hat{K}} \frac{\nu}{\det J} \widehat{\mathbf{W}}_f^T [\partial_u (J J^T) - (J J^T) \frac{\partial_u \det J}{(\det J)^2}] \widehat{\mathbf{W}}_f$$



*Dérivation de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$*  : On décompose en deux termes :

$$\partial_u(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = \partial_u\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \mathbf{J}(\partial_u\mathbf{J})^T$$

Tous les termes sont déjà connus avec ce qui précède, il en est de même pour le déterminant.

*Dérivée de la matrice  $\mathbf{N}$*  : On décompose le cas suivant la direction de dérivation,

$$\begin{aligned} \partial_{xyz}\mathbf{N} = & \int_{\hat{K}} \frac{\nu}{(\det\mathbf{J})^2} \widehat{\mathbf{W}}_f^T [\mathbf{J}\mathbf{J}^T] [\partial_{xyz}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \widehat{\mathbf{W}}_f \\ & - \int_{\hat{K}} \frac{\nu}{\det\mathbf{J}} \widehat{\mathbf{W}}_f^T [(\partial_{xyz}\mathbf{J})\mathbf{J}^T + \mathbf{J}(\partial_{xyz}\mathbf{J})^T] \widehat{\mathbf{W}}_f \end{aligned}$$

soit, dans l'élément réel :

$$\begin{aligned} \partial_{xyz}\mathbf{N} = & \int_K \frac{\nu}{\det\mathbf{J}} \mathbf{W}_f^T [\partial_{xyz}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{W}_f \\ & - \int_K \nu \mathbf{W}_f^T [\mathbf{J}^{-1}(\partial_{xyz}\mathbf{J}) + (\partial_{xyz}\mathbf{J})^T \mathbf{J}^{-T}] \mathbf{W}_f \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

avec les mêmes conventions que pour la matrice  $\mathbf{N}$

### B.2.3 Au sujet des rotationnels et des fonctions d'interpolations

- Les vecteurs de degrés de liberté  $(\bar{b}, \bar{h})$  ne dépendent pas de l'intégration. Il est donc tout à fait possible de les faire passer sous le signe somme. On se retrouve avec des termes du type  $\widehat{\mathbf{W}}_f \bar{b}$  ou  $\bar{b}^T \widehat{\mathbf{W}}_f^T$  qui ne sont que les valeurs de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}^T$  au point d'intégration (idem pour le champ magnétique). Cette remarque est intéressante car elle permet de réutiliser les routines d'interpolation des champs.
- Le rotationnel d'une fonction  $u$  dans le repère d'origine est lié à celui dans le repère de référence par :  $\text{rot}_{xyz}u = \frac{\mathbf{J}^T}{\det\mathbf{J}} \text{rot}_{\alpha\beta\chi}u$  ce qui permet de travailler directement avec le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et des fonctions d'arêtes pour l'énergie magnétique. A la différence que les fonctions obtenues ne sont **plus linéaires par tétraèdre**.

## Annexe C

# Application de la méthode des travaux virtuels aux aimants

### C.1 Calcul de forces dans les aimants

#### C.1.1 Généralités sur les aimants

La méthode des travaux virtuels peut encore s'appliquer au cas des matériaux magnétiques aimantés. Tout l'enjeu est de définir les expressions correctes de l'énergie et de la coénergie. Celles-ci doivent satisfaire la loi de comportement bien que l'énergie réelle due à la magnétisation dépende du chemin suivi.

Les aimants dits « permanents » sont des matériaux magnétiques durs pour lesquels on suppose que l'aimantation du matériau  $M$  reste constante. Les caractéristiques  $(B, H)$  des aimants réels sont souvent complexes et dépendent fortement du matériau. Suivant la formulation, on privilégiera soit un aimant représenté par une induction rémanente soit représenté par un champ coercitif. Dans toute notre étude, la caractéristique du matériau sera supposée linéaire de pente  $\mu_0$  et possédant une ordonnée à l'origine non nulle,  $B_r$  appelée champ d'induction rémanent. La caractéristique simplifiée peut être exprimée par l'ajout d'une valeur  $(H_c, B_r)$  à celle d'un matériau linéaire. Les lois correspondantes sont  $B = \mu_0(H + H_c)$  ou  $B = \mu_0 H + B_r$  selon que l'on utilise l'expression du champ coercitif ou celle de l'induction rémanente.

### C.1.2 Formulations avec aimants

La formulation électrique s'accommode bien avec l'utilisation de  $B_r$  en tant que deux formes et de  $B_r$  discrétisé avec des éléments de facettes. On utilisera  $H_c$  discrétisé avec des éléments d'arêtes pour la formulation magnétique. La prise en compte des aimants dans `Code_Carmel3D` est assurée par l'ajout d'un second membre au système, conformément à ce qui suit.

#### Formulation électrique :

Considérons le problème de magnétostatique défini en partie I 3. Les équations de Maxwell dans le cas de la magnétostatique sont :

$$dB = 0 \quad \quad \quad dH = J_s \quad \quad \quad (C.1a)$$

$$B = \mu H + B_r \quad \quad \quad B_r \neq 0 \text{ sur } \mathcal{M}, 0 \text{ sinon} \quad \quad \quad (C.1b)$$

où  $\mathcal{M}$  est le domaine de l'aimant. On introduit le potentiel vecteur  $A$  et pour des raisons de lisibilité, on prolonge  $B_r$  à  $\Omega$  entier, avec  $B_r$  nul si on ne se trouve pas dans un matériau magnétisé. Le rotationnel de la loi de Maxwell-Ampère donne, par linéarité en faisant passer les grandeurs connues dans le membre de droite :

$$d(\nu dA) = J_s + d(\nu B_r) \quad \quad \quad (C.2)$$

L'application de la méthode des résidus avec  $A'$  donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A' \wedge d(\nu dA) &= \int_{\Omega} A' \wedge J_s + \int_{\Omega} A' \wedge d(\nu B_r) \\ \int_{\Omega} dA' \wedge \nu dA + \int_{\partial\Omega} A' \wedge t(\nu dA) &= \int_{\Omega} A' \wedge J_s + \int_{\Omega} dA' \wedge \nu B_r + \int_{\partial\Omega} A' \wedge t(\nu B_r) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Le terme de bord peut être simplifié dans le cas où il n'y a pas de flux de  $B_r$  sortant du domaine, on suppose donc qu'il n'y a pas d'aimant collé sur la surface extérieure au domaine (où que  $B_r$  est tangent à cette surface). On se retrouve à assembler un second membre élémentaire supplémentaire du type :

$$S_i = \int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} w_{ai} \cdot B_r. \quad \quad \quad (C.4)$$

Il est important de noter que l'application de la formule de Green au terme en  $dA' \wedge \nu B_r$  permet de régler les problèmes de continuité posés par le terme  $d(\nu B_r)$  (REN et RAZEK 1994).

**Formulation électrique :**

Les équations de la magnétostatique et le potentiel scalaire  $\Omega$  peuvent s'écrire :

$$\mathbf{dB} = 0 \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{d}\Phi \qquad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c) \qquad H_c \neq 0 \text{ sur } \mathcal{M}, \ 0 \text{ sinon} \qquad (\text{C.6})$$

$$(\text{C.7})$$

L'application de la méthode des résidus pondérés mène au système :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mu \mathbf{d}\Phi) &= \mathbf{d}(\mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)) \\ \int_{\Omega} \Phi' \wedge \mathbf{d}(\mu \mathbf{d}\Phi) &= \int_{\Omega} \Phi' \wedge \mathbf{d}(\mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)) \\ \int_{\Omega} \mathbf{d}\Phi' \wedge \mu \mathbf{d}\Phi + \int_{\partial\Omega} \Phi' \wedge \mathbf{t}(\mu \mathbf{d}\Phi) &= \int_{\Omega} \mathbf{d}\Phi' \wedge \mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c) + \int_{\partial\Omega} \Phi' \wedge \mathbf{t}(\mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)) \end{aligned} \qquad (\text{C.8})$$

Les aimants sont alors pris en compte par l'ajout d'un second membre unitaire ayant la même forme que celui d'un champ source calculé à partir de la densité de courant source.  $H_c$  étant parfaitement connu, le second membre est initialisé directement par calcul de la circulation du champ coercitif sur les arêtes du maillage (méthode des trapèzes par exemple).

**C.1.3 Puissances virtuelles et aimants**

Si les formulations permettent de calculer avec précision les grandeurs électromagnétiques dues à la présence d'aimants, il reste à définir l'expression de l'énergie à utiliser pour la méthode des travaux virtuels. Cette expression n'est pas identifiable car supposerait de connaître tous les « états magnétiques » du matériau depuis la première aimantation. Cette démarche est difficilement réalisable, il va falloir utiliser des formules approchées. Celles-ci doivent, au minimum, respecter la loi de comportement à savoir :  $\partial_B \Psi = H$ ,  $\partial_H \Phi = B$  et aussi  $\Psi + \Phi = \int_{\Omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{H}$ . (BOSSAVIT 2004, 2007).

Il reste à savoir quelles grandeurs varient par rapport au paramètre de déplacement  $u$ . Selon que l'on garde  $B_r$  ou  $H_c$  constant, les deux distributions de forces calculées seront différentes.

Prenons le cas où  $H = \nu_u B - H_c$  avec  $H_c$  indépendant par rapport à  $u$ . On recalcule l'expression de la dérivée partielle de l'énergie<sup>1</sup> (BOSSAVIT 2004) :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Psi(u, B) &= \partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} B \wedge H \\
 &= \partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} B \wedge [\nu B - H_c] \\
 &= \int_{\Omega} \partial_t B \wedge \nu B + 0 \\
 &= - \int_{\Omega} L_v B \wedge \nu B \\
 &= - \int_{\Omega} (i_v dB + di_v B) \wedge \nu B \\
 &= - \int_{\Omega} di_v B \wedge (H + H_c) \\
 &= - \int_{\Omega} i_v B \wedge d(H + H_c) \\
 &\equiv - \int_{\Omega} (v \times B) \cdot \text{rot} (H + H_c), \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

avec les traces nulles sur  $\partial\Omega$ . Comme  $\partial_t \Psi = \partial_u \Psi \cdot v$ , en échangeant  $B$  et  $v$  et par permutation circulaire, on remarque que l'équation C.9 est équivalent à définir une distribution de force est égale à :

$$f = \text{rot} (H + H_c) \times B. \tag{C.10}$$

Dans le deuxième cas, on suppose  $H = \nu_u (B - B_r)$  avec  $B_r$  indépendant par rapport à  $u$ . Ce sont des 2-formes, la dérivation partielle par rapport à  $t$  donne

---

1. Ici on suppose la perméabilité uniforme dans le domaine considéré, et indépendante de  $u$ . Il vient :  $\mu = \mu_0 = \mu_u(u(x)) = \mu(x)$ . De plus,  $\partial_t B + L_v B = 0$ .

(BOSSAVIT 2004) :

$$\begin{aligned}
\partial_t \Psi(u, B) &= \partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu B \wedge B - \partial_t \int_{\Omega} \nu B \wedge B_r \\
&= \int_{\Omega} \nu \partial_t B \wedge [B - B_r] - \int_{\Omega} \nu \partial_t B \wedge B \\
&= - \int_{\Omega} \nu \mathbb{L}_v B \wedge (B - B_r) + \int_{\Omega} \nu \mathbb{L}_v B_r \wedge B \\
&= - \int_{\Omega} \nu \mathbf{d}i_v B \wedge (B - B_r) + \int_{\Omega} \nu (\mathbf{i}_v \mathbf{d}B_r + \mathbf{d}i_v B_r) \wedge B \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{i}_v B \wedge \mathbf{d}H + \int_{\Omega} \mathbf{i}_v B_r \wedge \mathbf{d}(H + H_c) + \int_{\Omega} \mathbf{i}_v \mathbf{d}B_r \wedge (H + H_c) \\
&\equiv \int_{\Omega} [\text{rot } H \times B - \text{rot } (H + H_c) \times B - \text{div } B_r (H + H_c)] \cdot v, \quad (\text{C.11})
\end{aligned}$$

avec les traces nulles sur  $\partial\Omega$  et  $\partial_t \Psi = \partial_u \Psi \cdot v$ . L'équation C.11 donne une densité de force équivalente :

$$f = \text{rot } H \times B - \text{rot } (H + H_c) \times B - \text{div } B_r (H + H_c). \quad (\text{C.12})$$

Cette relation peut aussi être démontrée via l'expression de la coénergie. La relation  $\Psi + \Phi = \int_{\Omega} B \wedge H$  étant toujours valable, on a toujours  $\partial_u \Psi = -\partial_u \Phi$  et les distributions de forces devraient être les mêmes.

## Conclusion

Les expressions sources de l'énergie n'étant pas les mêmes, les résultats mathématiques issus d'une dérivation partielle n'ont aucune raison d'être équivalents. Les grandeurs globales doivent en revanche être les mêmes, permettant seulement l'étude des grandeurs globales de systèmes électromécaniques (couples, force totale).

### C.1.4 Expressions des énergies

L'objectif de cette section est d'identifier des expressions d'énergie et de co-énergie utilisables dans un code éléments fini. Nous avons retenu deux expressions

couramment rencontrées dans la littérature qui respectent  $\partial_B \Psi = H$ ,  $\partial_H \Phi = B$  et  $\Psi + \Phi = \int_{\Omega} B \wedge H$ . Pour chacune d'elles, il est préférable d'utiliser le couple  $(B, B_r)$  discrétisé par des éléments de facettes pour les formulations électriques, et le couple  $(H, H_c)$  discrétisé par des éléments d'arêtes pour les formulations magnétiques. La loi de comportement étant toujours supposée affine telle que  $B = \mu H + B_r$  ou  $B = \mu(H + H_c)$ .

### Expression 1 :

L'expression est obtenue en intégrant l'expression de  $H$  entre  $B_r$  à  $B$  (MEDEIROS et al. 1998 ; TAFERGUENIT 2003). Sachant  $B_r \geq B$  et  $H \leq 0$  l'expression de  $\Psi$  est positive. Le produit  $H \cdot B$  est quant à lui négatif, on en déduit que  $\Phi$  est négative. Du fait que  $\Psi + \Phi = \int H \cdot B$ , on vérifie que la coénergie est égale l'intégrale de  $B$  entre 0 à  $H$ . De plus on peut écrire :  $|\Phi_1| \geq |\Psi_1|$ . Une représentation de la loi de comportement et des énergies est donnée ci-après :

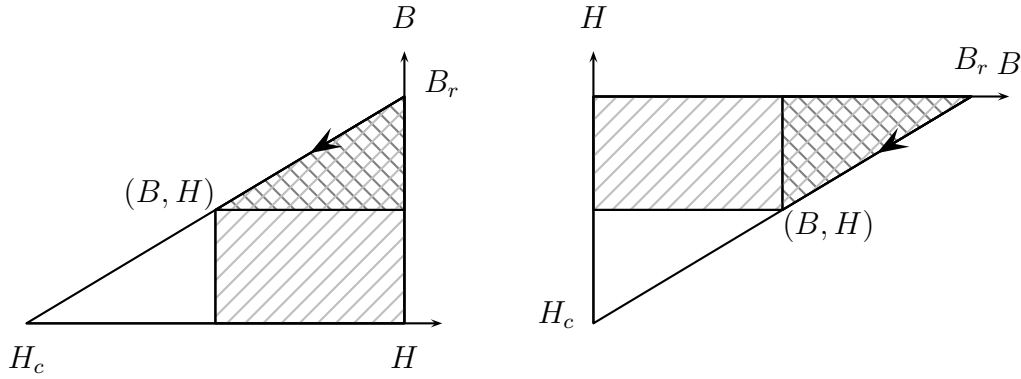


FIGURE C.1 – *Energie et coénergie pour la première expression.*

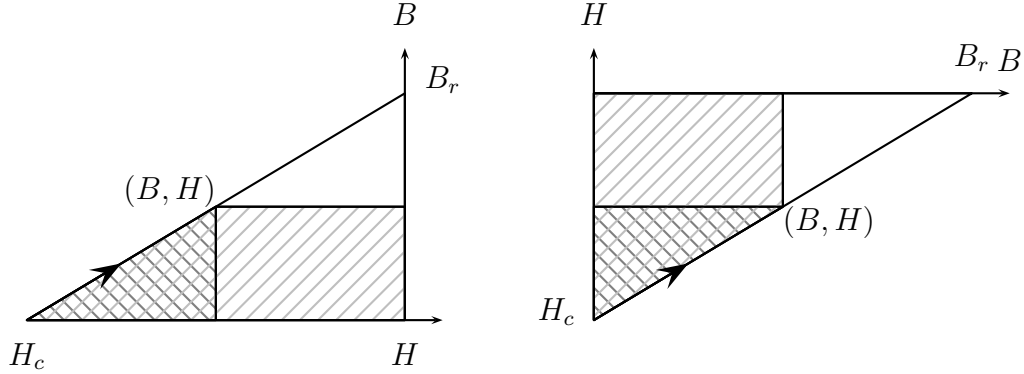
On en déduit les expressions suivantes pour l'énergie et la coénergie, calculées pour les mêmes justifications que dans (TAFERGUENIT 2003) soit avec  $(B, B_r)$  en éléments de facettes, soit avec  $(H, H_c)$  et des éléments d'arêtes.

$$\Psi_1 = \int_{\mathcal{V}} \frac{\nu}{2} (B - B_r)^T (B - B_r) \quad (C.13)$$

$$\Phi_1 = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mu}{2} [(H + H_c)^T (H + H_c) - H_c^T H_c] \quad (C.14)$$

**Expression 2 :**

Le deuxième couple d'expression est obtenue à partir du calcul de l'énergie où  $H$  est intégré entre 0 et  $B$ . En suivant la même démarche, il vient :  $\Psi \leq 0$  et comme  $\Psi + \Phi = \int H \cdot B$  on en déduit que  $\Psi$  est l'intégrale de  $B$  entre  $-H_c$  et  $H$  avec  $\Psi \geq 0$ . Les représentations des intégrales sont :



**FIGURE C.2** – *Energie et coénergie pour la deuxième expression.*

On déduit alors les expressions intégrées suivantes :

$$\Psi_2 = \int_{\mathcal{V}} \frac{\nu}{2} [(B - B_r)^T (B - B_r)^T B_r] \quad (\text{C.15})$$

$$\Phi_2 = \int_{\mathcal{V}} \mu \left[ \frac{1}{2} (H + H_c)^T (H + H_c) - H_c^T H_c \right] \quad (\text{C.16})$$

Une vérification de principe donne :  $\partial_B \Psi_1 = \partial_B \Psi_2 = H$ ,  $\partial_H \Phi_1 = \partial_H \Phi_2 = B$  et  $\Psi_1 + \Phi_1 = \Psi_2 + \Phi_2 = H \cdot B$ . Les expressions des forces sont déduites de la méthode des travaux virtuels de la même manière que pour le cas des matériaux non magnétisés, en conservant les flux de  $B$  constants ou les circulations  $H$  constantes grâce aux éléments de Whitney. L'ensemble des résultats est rappelé en annexe E.

## C.2 Tests numériques

On présente quelques résultats de calcul de forces locales pour les aimants. Le premier exemple traite de deux aimants placés en vis à vis. Les distributions de forces sont présentées ainsi qu'un calcul de la force totale. un deuxième exemple,



montre les résultats qui peuvent être obtenus suite à l'utilisation brute de ces forces pour un calcul de mécanique.

### C.2.1 Aimants face à face

Deux aimants parallélépipédiques sont placés en vis à vis, les paramètres géométriques et magnétiques sont reportés dans la table C.1. Le calcul a été réalisé pour les deux formulations, ainsi que pour les deux définitions des énergies présentées en section C.1.4. Les distributions de forces sont présentées pour les quatre cas dans les figures C.3 et C.4. Il s'agit d'un agrandissement de la zone d'air entre les deux aimants.

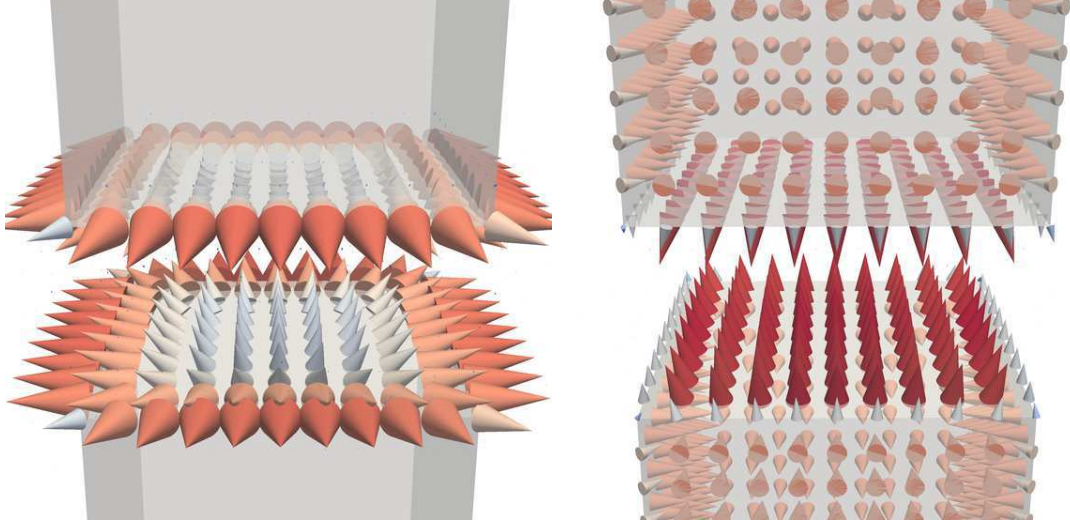
Pour chaque cas, la force totale est calculée et est reportée dans le tableau C.2. A formulation identique, et par conséquent à DdL identiques, la force totale calculée pour les deux formulations est rigoureusement la même.

Côté	$r = 0.5\text{m}$
Hauteur	1m
$\delta$	0.5m
Champ rémanent	1T

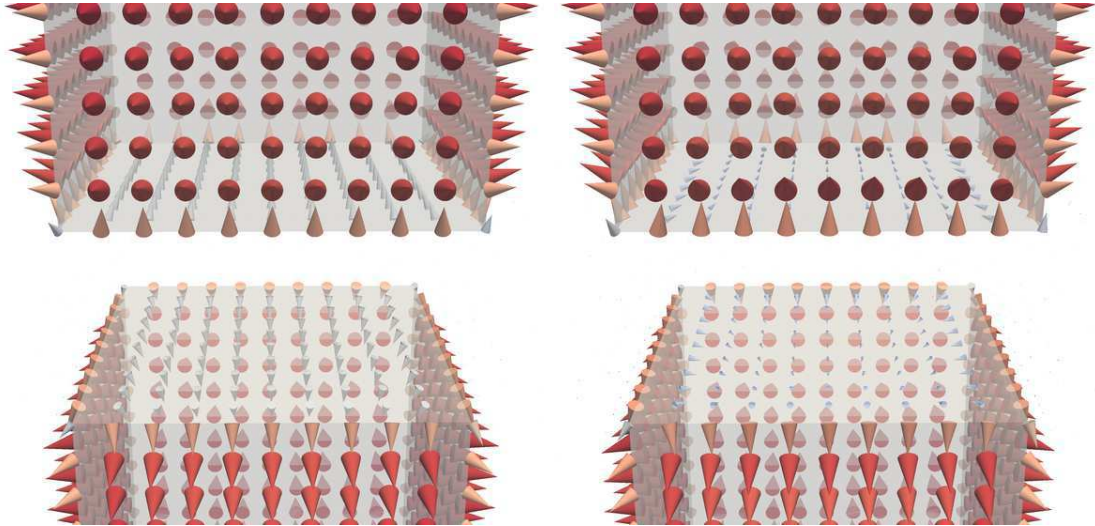
**TABLE C.1** – Paramètres utilisés pour le cas des deux aimants séparés.

Formulation		
Définition	Électrique	Magnétique
1	-89050 N	-83483 N
2	-89050 N	-83483 N

**TABLE C.2** – Force totale appliquée sur l'aimant supérieur pour les deux formulations magnétiques et les deux définitions possibles de l'énergie..



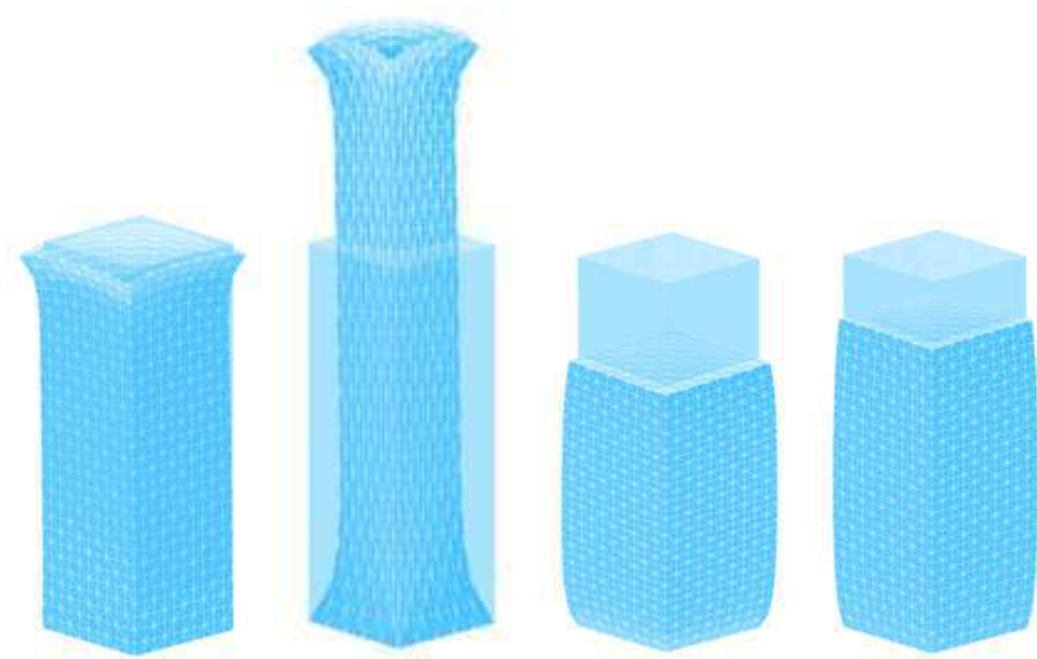
**FIGURE C.3** – Représentation de la distribution de force pour la formulation électrique. **Gauche** : Forces calculées à partir de l'expression 1. **Droite** : Forces issues de l'expression 2.



**FIGURE C.4** – Représentation de la distribution de force pour la formulation magnétique. **Gauche** : Forces calculées à partir de l'expression 1. **Droite** : Forces issues de l'expression 2.

### C.2.2 Déformations issues du calcul de forces locales

La figure C.5, présente les déformées pour un aimant obtenues pour les quatre cas. À répartition des forces différentes, les déformées seront différentes. Cet exemple, dont le sens physique est très discutable, met en images l'erreur commise. MEDEIROS et al. (2000) a présenté une manipulation numérique, basée sur la soustraction successive des forces pour un unique aimant, permettant d'obtenir une distribution unique.



**FIGURE C.5** – *Représentation des déformées pour un aimant. De gauche à droite : Formulation électrique-expression 1, formulation électrique-expression 2, formulation magnétique-expression 1, formulation magnétique-expression 2.*

## Annexe D

# Calcul analytique des efforts magnétiques

### D.1 Méthode de l'image

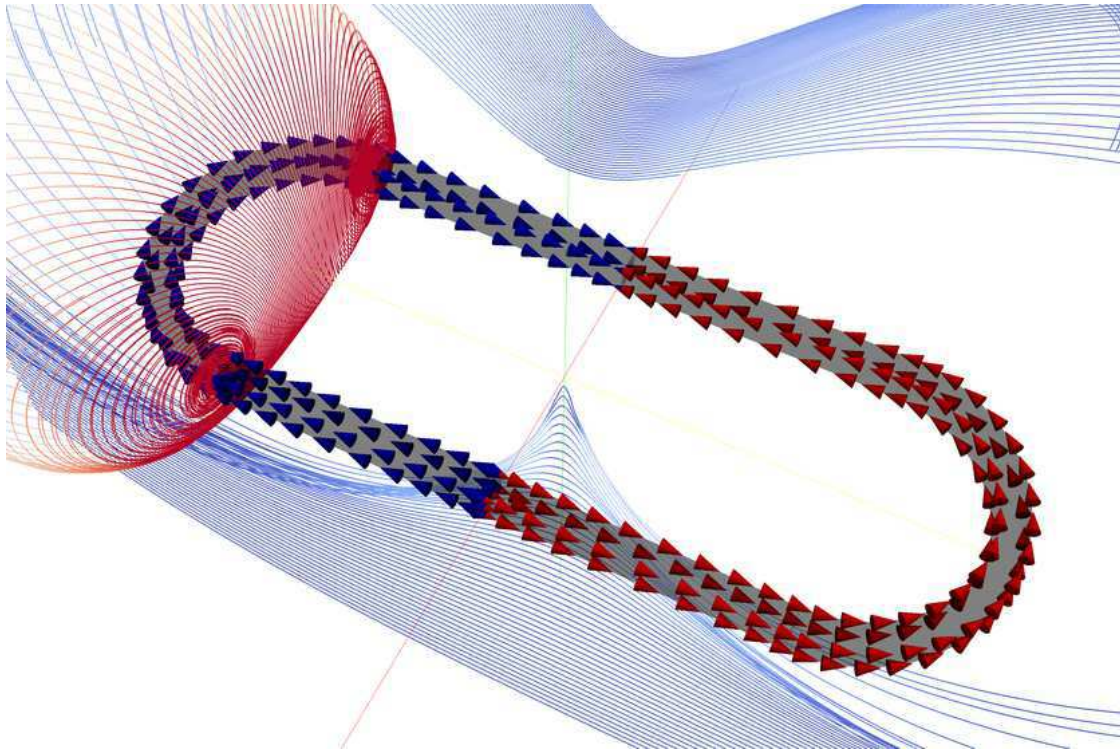
Une condition  $H \times n = 0$  peut être imposée en plaçant une structure image du côté opposé au plan de la condition  $H \times n = 0$  comme présenté sur la figure D.1.

### D.2 Application des méthodes analytiques aux cages de développantes

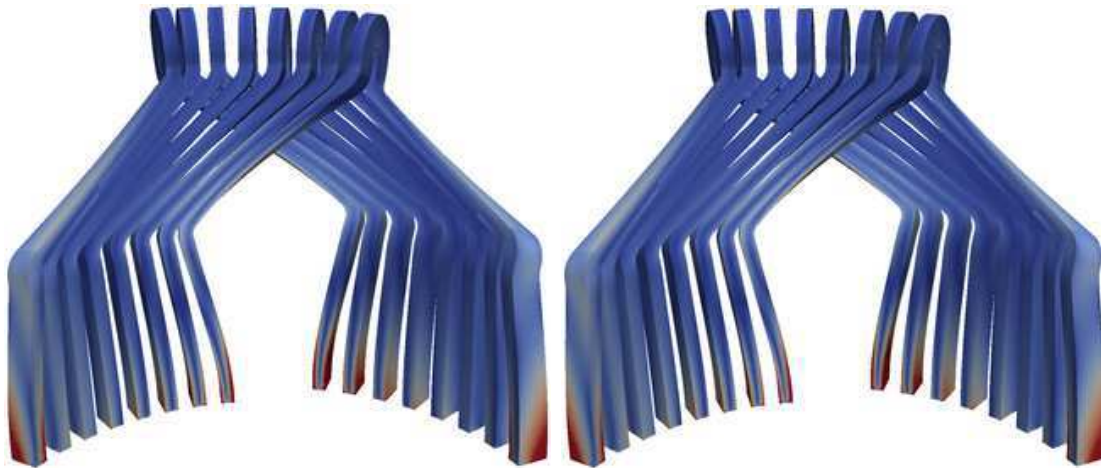
Un calcul de la déformée d'un ensemble de développantes est réalisé, pour le problème de magnétisme, à l'aide de la méthode des éléments finis ou à l'aide des méthodes de Urankar. Dans les deux cas la force de Laplace est prise comme source pour le code de mécanique. La méthode analytique permet de pouvoir calculer la force appliquée aux barres sans avoir à représenter l'air. Ainsi, seul le maillage des conducteurs est nécessaire. De plus, une expression nodale est connue alors que dans le cas de la méthode éléments finis  $J \times B$  est constant par élément.

### D.3 Points singuliers des équations de Urankar

Les formules présentées dans (URANKAR 1980, 1982a,b) sont singulières pour les cas  $r = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pm\pi/2$ , ainsi que pour tous les cas composés. Il est possible de lever ces indéterminations en partant de la formule de Biot–Savart,



**FIGURE D.1** – Application de la méthode de l'image à un inducteur courbé. Des lignes de champs sont tracées : elles coupent le plan de symétrie orthogonalement à celui-ci.



**FIGURE D.2** – Déformations au sein de la structure ( $\times 10^8$ ), la surface est colorée par la norme de Frobenius du tenseur des contraintes. La différence relative en norme entre les deux méthodes est de 7%. **Gauche** : Méthode Éléments Finis. **Droite** : Modèle purement analytique.

puis en appliquant des méthodes de changement de variables ou des méthodes applicables aux intégrales impropres. Ces calculs sont présentés en détail dans JOURNEAUX (2010).





# Annexe E

## Calcul des énergies dans les aimants

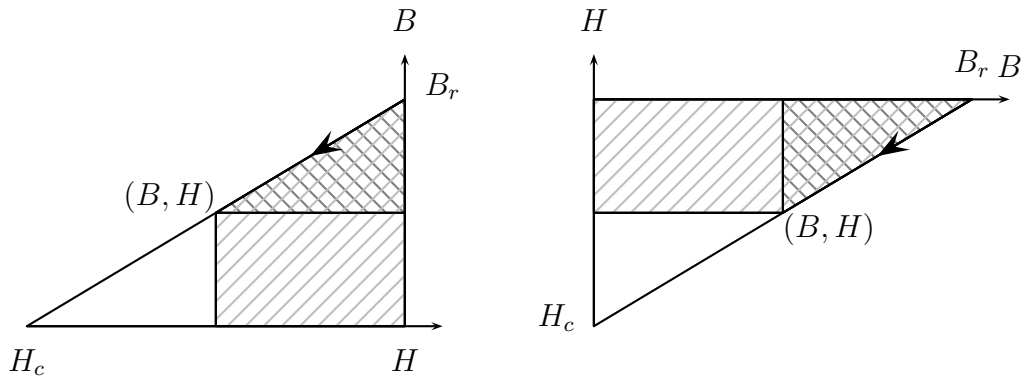
Deux expressions d'énergies dans les aimants ont été retenues, on présente ici les méthodes de calcul et les justifications pour les obtenir.

### E.1 Expression 1

La première expression d'énergie correspond à :

$$\phi_1 = \int_{B_r}^B H db \geq 0 \quad (\text{E.1})$$

Qui correspond à la surface hachurée en foncé sur la figure E.1. Il s'agit d'une intégrale par valeur décroissante d'une grandeur négative, elle est donc positive. Pour



**FIGURE E.1** – *Energie et coénergie pour la première expression.*

satisfaire la relation  $\phi_1 + \psi_1 = HB \leq 0$ ,  $\psi_1$  doit être négative, de plus  $|\psi_1| \geq |\phi_1|$ .



On définit la coénergie comme :

$$\psi_1 = \int_0^H B dh \leq 0 \quad (\text{E.2})$$

### E.1.1 Calcul des intégrales

Soit :

$$\phi_1 = \int_{\mathbf{B}_r}^{\mathbf{B}} \mathbf{H}^T d\boldsymbol{\gamma} = \int_{\mathbf{B}_r}^{\mathbf{B}} \nu(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{B}_r)^T d\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{E.3})$$

Ne doit pas dépendre du chemin vectoriel  $\boldsymbol{\gamma}$  suivi, on passe aux bornes de la primitive :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \nu \left[ \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma}}{2} - \mathbf{B}_r^T \boldsymbol{\gamma} \right]_{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{B}_r}^{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{B}} \\ &= \nu \left[ \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{B}}{2} - \mathbf{B}_r^T \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r}{2} + \mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r \right] \\ &= \nu \left[ -\frac{\mathbf{B}_r^T}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{B}}{2} - \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r}{2} - \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r}{2} \right] \\ &= \nu \left[ -\frac{\mathbf{B}_r^T}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r) + \frac{\mathbf{B}^T}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r) \right] \\ &= \frac{\nu}{2} [(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)^T (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)] \end{aligned}$$

En ce qui concerne la coénergie :

$$\psi_1 = \int_0^H \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\gamma} = \int_0^H \mu(\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{H}_c)^T d\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{E.4})$$

Idem en ce qui concerne le chemin vectoriel,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \mu \left[ \frac{\gamma^T \gamma}{2} + \mathbf{H}_c^T \gamma \right]_{\gamma=0}^{\gamma=\mathbf{H}} \\
 &= \mu \left[ \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{2} + \mathbf{H}_c^T \mathbf{H} \right] \\
 &= \mu \left[ \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}}{2} \right] \\
 &= \mu \left[ \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}_c) + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}}{2} - \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} \mathbf{H}_c \right] \\
 &= \frac{\mu}{2} [(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T (\mathbf{H} + \mathbf{H}_c) - \mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c]
 \end{aligned}$$

On peut faire la vérification, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \phi_1 + \psi_1 &= \mathbf{B}^T \mathbf{H} \\
 \partial_b \phi_1 &= \mathbf{H} \\
 \partial_h \psi_1 &= \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

## E.2 Expression 2

La seconde expression correspond à :

$$\phi_2 = \int_0^B H db \leq 0 \quad (\text{E.5})$$

Qui correspond à la surface hachurée en couleur claire sur la figure E.2. Il s'agit d'une intégrale par valeur croissante d'une grandeur négative, elle est donc négative. Pour satisfaire la relation  $\phi_2 + \psi_2 = HB \leq 0$ ,  $\psi_2$  doit être positive, de plus  $|\phi_2| \geq |\psi_2|$ . On définit la seconde coénergie comme :

$$\psi_2 = \int_{-H_c}^H B dh \geq 0 \quad (\text{E.6})$$

### E.2.1 Calcul des intégrales

Soit :

$$\phi_2 = \int_0^B \mathbf{H}^T d\gamma = \int_0^B \nu(\gamma - \mathbf{B}_r)^T d\gamma \quad (\text{E.7})$$

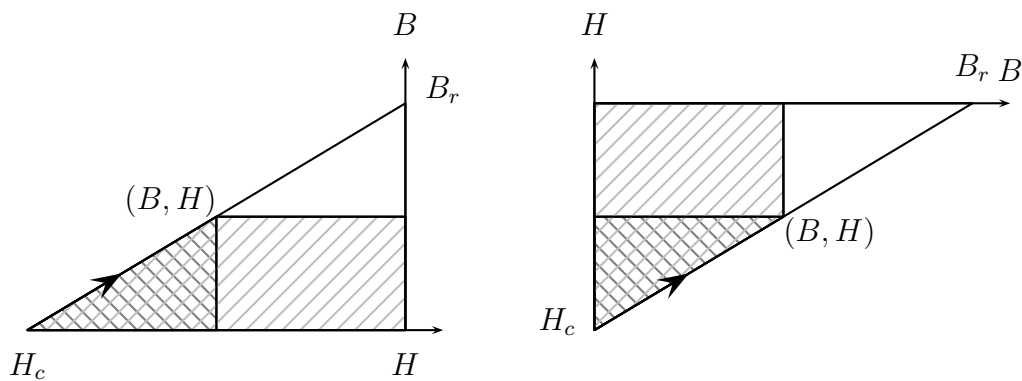


FIGURE E.2 – *Energie et coénergie pour la deuxième expression.*

Ne doit pas dépendre du chemin vectoriel  $\gamma$  suivi, on passe aux bornes de la primitive :

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \nu \left[ \frac{\gamma^T \gamma}{2} - \mathbf{B}_r^T \gamma \right]_{\gamma=0}^{\gamma=\mathbf{B}} \\
 &= \nu \left[ \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{B}}{2} - \mathbf{B}_r^T \mathbf{B} \right] \\
 &= \nu \left[ \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r^T) \mathbf{B}}{2} - \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}}{2} \right] \\
 &= \nu \left[ \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r^T)(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)}{2} - \frac{\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}}{2} + \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r^T) \mathbf{B}_r}{2} \right] \\
 &= \frac{\nu}{2} [(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)^T (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r) - \mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r]
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne la coénergie :

$$\psi_2 = \int_{-\mathbf{H}_c}^{\mathbf{H}} \mathbf{B}^T d\gamma = \int_{-\mathbf{H}_c}^{\mathbf{H}} \mu(\gamma + \mathbf{H}_c)^T d\gamma \quad (\text{E.8})$$

Idem en ce qui concerne le chemin vectoriel,

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \mu \left[ \frac{\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma}}{2} + \mathbf{H}_c^T \boldsymbol{\gamma} \right]_{\boldsymbol{\gamma}=-\mathbf{H}_c}^{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{H}} \\
&= \mu \left[ \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{2} + \mathbf{H}_c^T \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c}{2} - \mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c \right] \\
&= \mu \left[ \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c}{2} - \mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c \right] \\
&= \mu \left[ \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}_c) - \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T}{2} \mathbf{H}_c + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c}{2} - \mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c \right] \\
&= \mu \left[ \frac{(\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)^T (\mathbf{H} + \mathbf{H}_c)}{2} - \mathbf{H}_c^T \mathbf{H}_c \right]
\end{aligned}$$

On peut faire la vérification, la somme est égale à :

$$\phi_2 + \psi_2 = \mathbf{B}^T \mathbf{H}$$

$$\partial_b \phi_2 = \mathbf{H}$$

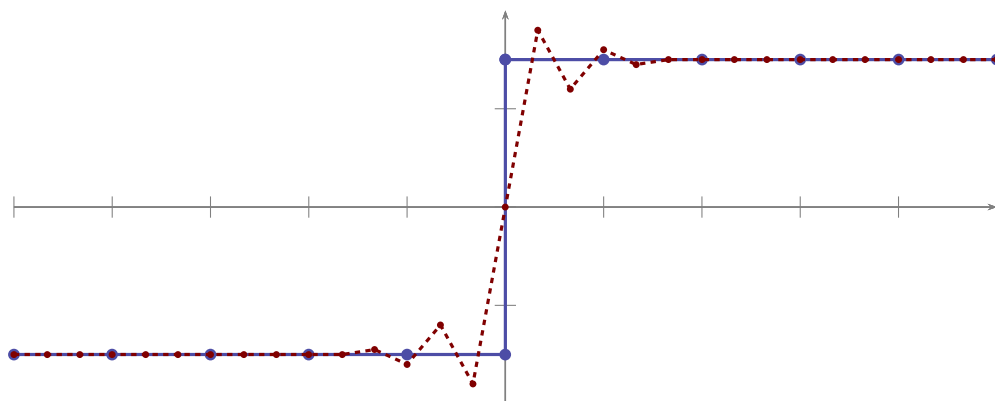
$$\partial_h \psi_2 = \mathbf{B}$$



## Annexe F

# Phénomène de Gibbs et lissage $\mathcal{H}^1$

### F.1 Oscillations locales

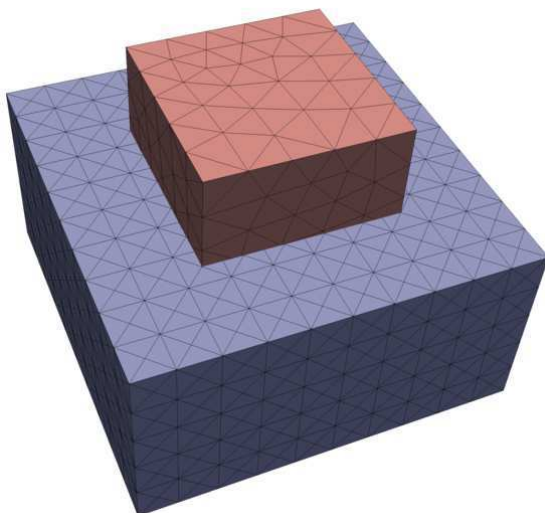


**FIGURE F.1** – *Exemple unidimensionnel d'oscillations. La fonction source en bleu est discrétisée sur les intervalles  $n, n = -5 \dots 5$  et la fonction cible est discrétisée par intervalles  $n/3, n = -15 \dots 15$ .*

La projection de  $\mathcal{L}^2$  tend à minimiser la distance en tout point du domaine de projection. Hormis la non prise en compte des dérivées, cette solution semble donc la meilleure qui puisse être obtenue. Cependant, la projection de  $\mathcal{L}^2$  peut s'avérer localement instable aux endroits où la fonction source varie rapidement. Un phénomène analogue au phénomène de Gibbs pour les séries de Fourier apparaît (JIAO et HEATH 2004), et les erreurs locales obtenues avec cette méthode peuvent être grandes.

Prenons l'exemple de deux cubes concentriques, comme présentés sur la figure

F.2. Le cube rose supporte une solution uniformément égale à 1, prolongée par 0, qui va être projetée sur le maillage du cube bleu.

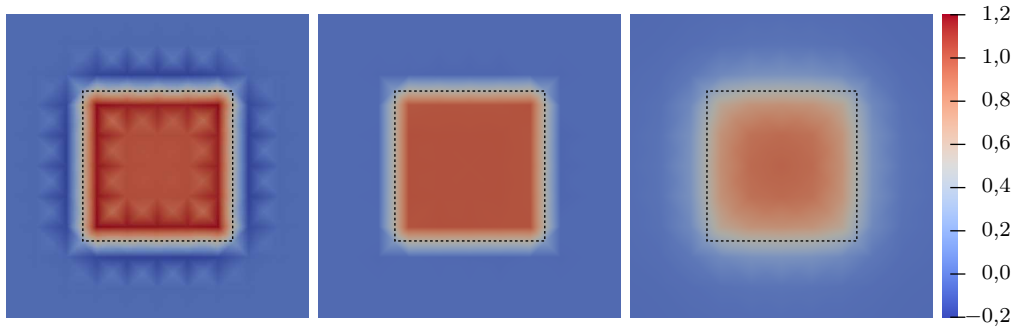


**FIGURE F.2** – Géométrie du problème composé de deux cubes concentriques d'arêtes respective 2 (en bleu, dont seule la demie partie inférieure est représentée) et 1 (en rose).

Les résultats des différentes projections sont présentés sur la figure F.3. La projection  $\mathcal{L}^2$  (figure F.3, gauche) donne des valeurs inférieures et supérieures à 1 le long de l'interface (zones en bleu foncé et rouge foncé). La projection  $\mathcal{H}^{grad}$  avec une constante de Sobolev  $\alpha = 2.10^{-3}$  (figure F.3, droite) tends à lisser la solution car elle prend en compte les dérivées des différentes fonctions, tendant à être élevées à l'interface. La constante de Sobolev a été adaptée au cas étudié afin de minimiser les sauts sans pour autant dégrader la solution de manière trop importante. Le mauvais choix de cette constante peut entraîner, soit des performances égales à la méthode  $\mathcal{L}^2$  ( $\alpha$  faible), ou au contraire un lissage inacceptable de la solution ( $\alpha$  important, figure F.3, à droite).

## F.2 Choix de la constante de Sobolev

Il n'y a pas de choix *a priori* de la constante de Sobolev. Le terme en dérivées partielles permet de limiter les oscillations locales mais doit rester globalement

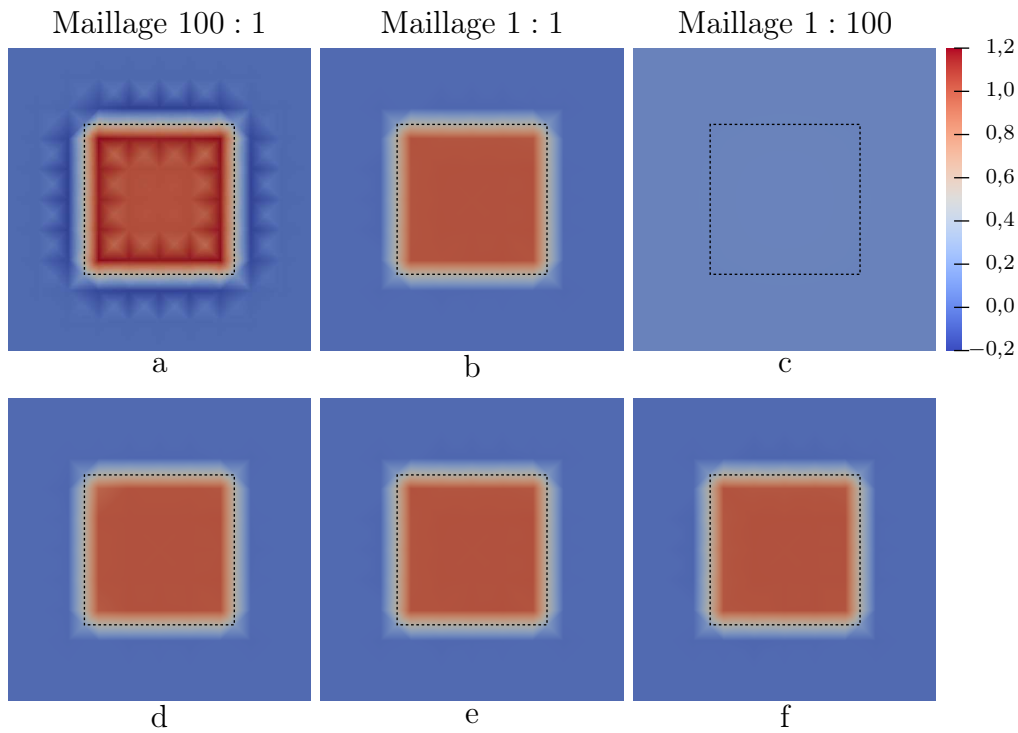


**FIGURE F.3** – Cubes concentriques – Résultat des projections  $\mathcal{L}^2$  (à gauche) et  $\mathcal{H}^{grad}$  avec une constante de Sobolev de  $2 \cdot 10^{-3}$  (au centre) et  $2 \cdot 10^{-2}$  (à droite).

faible devant le produit direct sous peine de lisser la solution. Les résultats numériques montrent qu'un rapport 10 en norme moyenne produit généralement de bons résultats.

D'autre part, l'ajout d'un terme en dérivées partielles entraîne une forte sensibilité d'échelle. Pour un cas donné, la constante doit varier avec  $h_c^2$  pour présenter un comportement, avec la minimisation de Sobolev, proche de celui de la méthode  $\mathcal{L}^2$ . La figure F.4 reprend le cas des deux cubes concentriques (paragraphe F.1). Deux autres paires de maillages sont créées, l'un avec un facteur d'échelle de  $10^2$  et l'autre de  $10^{-2}$ . La partie supérieure de la figure montre la modification apportée dans la projection sans variation de la constante  $\alpha$ . Pour la partie inférieure,  $\alpha$  varie comme  $h_c^2$ . La projection utilisant le produit de Sobolev devient sous cette condition indépendante de l'échelle du problème.





**FIGURE F.4** – Effet d’échelle de la constante de Sobolev. Maillages respectivement à l’échelle 100 (a, d), 1 (b, e) et  $1/100$  (c, f). Les deux figures du centre (b, e) reprennent le cas test de la partie F.1. **1<sup>ère</sup> ligne (a, b, c)** : constante de Sobolev égale à  $2 \cdot 10^{-3}$ . **2<sup>ème</sup> ligne (d, e, f)** :  $\alpha$  valant  $2 \cdot 10^1$ ,  $2 \cdot 10^{-3}$  et  $2 \cdot 10^{-7}$ , respectivement pour d, e et f.

## Annexe G

### Listes des figures, tableaux, algorithmes et abréviations



# Liste des figures

<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
1 <b>Gauche :</b> Partie tournante d'un turbo-alternateur. Au premier plan, les turbines haute pression puis les turbines basse pression. L'alternateur est en bout d'arbre, fermé. (Crédit : EDF SA) <b>Droite :</b> Extrémité statorique d'un turbo-alternateur, les développantes sont visibles sous la structure de serrage, la connexion avec le circuit de refroidissement est en blanc. (Crédit : SIEMENS AG) . . . . .	15
 <b>I Modélisation des problèmes multi-physiques</b>	 <b>21</b>
1.1 Représentation d'une bobine et de son image par la transformation $(e_x, e_y, e_z) \rightarrow (-e_x, e_y, e_z)$ (LÉVY 2005). . . . .	27
1.2 Figure schématique d'un condensateur plan et de son image par une homotétie de facteur 2 (LÉVY 2005). . . . .	28
3.1 Diagramme « de Tonti » pour le problème de thermique. . . . .	45
3.2 Diagramme « de Tonti » pour le problème de mécanique. . . . .	46
3.3 Diagramme « de Tonti » pour le problème de magnétisme. . . . .	49
4.1 Tracé, pour un élément bi-dimensionnel des champs générés par les fonctions de base de Nédélec (ERN 2005). . . . .	56
4.2 Tracé, pour un élément bi-dimensionnel des champs générés par les fonctions de base de Raviart–Thomas. (ERN 2005) . . . . .	58

4.3	Suite des espaces dicrets pour le maillage primal. La ligne du bas représente les espaces fonctionnels, les espaces du haut sont homogènes à $\mathbb{R}^n$ . . . . .	59
4.4	Représentation schématique des divers espaces pour le maillage primal et dual. Les étoiles représentent l'opérateur susceptible de faire passer de l'un à l'autre. . . . .	61

## II Prise en compte des inducteurs bobinés de géométrie complexe 71

5	Structure de Roebel d'une barre de conducteur. <b>Gauche</b> : une section de barre, les brins sont au centre (YOUNSI et al. 2004). <b>Droite</b> : détail des différentes permutations le long du conducteur (ALBRECHT et MASSEK 2004). . . . .	71
1.1	Cas général d'un inducteur et notations utilisées. $\mathcal{D}_{ind}$ représente le domaine de l'inducteur, $\mathcal{D}_{boi}$ est un domaine simplement connexe englobant $\mathcal{D}_{ind}$ . . . . .	74
1.2	Structure et définitions du coude à changement de section. . . . .	76
1.3	Détail de la géométrie du changement de section. . . . .	77
1.4	Exemple de densité de courant source calculée par la méthode électrocinétique. . . . .	79
1.5	Cas possibles d'isopotentielle locale à un élément. . . . .	80
1.6	Inducteur de géométrie quelconque avec le tracé des isopotentielles, mettant en évidence la déformation des surfaces. . . . .	83
1.7	Coupe de la densité de courant dans l'inducteur après correction de la norme par la méthode des isopotentielles. . . . .	83
1.8	Exemple schématique de la recherche de la section optimale à l'aide du gradient contraint sur une sphère. . . . .	85
1.9	Coupe de face et de profil de l'inducteur permettant de localiser les différents points utilisés. La section locale est donnée en bleu. . . .	88
1.10	Ligne support $\mathcal{C}_{opt}$ découverte par l'algorithme de recherche de sections. . .	89

1.11	Détail des diverses intersections sélectionnées. Les valeurs de directions et de surfaces servent à déterminer la direction et la norme de champ de vecteurs en tous points. . . . .	89
1.12	Coupe de la densité de courant finale construite par l'algorithme d'optimisation. . . . .	90
2.1	Exemple de découpe d'éléments pour un tétraèdre. . . . .	95
2.2	Exemple équivalent d'un arbre de facettes pour un maillage 2D triangulaire. Le DdL de la face 1 peut être déduit des DdL du bord du domaine, puis par calculs successifs les DdL des faces 2, 3, 4, 5 et 6 sont également déterminés. La même méthode est appliquée aux faces 7, 9, 10 et 11 permettant ainsi de déduire 8 puis finalement 12. . . . .	96
2.3	Premier cas test pour l'annulation de la divergence : bobine circulaire de grand rapport hauteur / rayon. Cette structure concentre les erreurs de discrétisation géométrique et de calcul de quadratures. . . . .	97
2.4	Premier cas test : visualisation d'une partie du champ analytique imposé sur le cylindre. . . . .	97
2.5	Premier cas test : résultat après minimisation de la divergence. Sur les faces du co-arbre, la densité est fortement modifiée par accumulation des erreurs. . . . .	98
2.6	Résultat après annulation de la divergence pour le second cas test : sur les faces du co-arbre, la densité est fortement modifiée par accumulation des erreurs. <b>Gauche</b> : Densité de courant source. <b>Droite</b> : Champ après correction par la méthode d'arbre. . . . .	98
2.7	Résultat après minimisation de la divergence : la densité source $N$ est très peu modifiée par rapport à $N_a$ . . . . .	101
2.8	Potentiel intermédiaire utilisé pour l'annulation de la divergence. L'équations utilisée a la même structure que celle utilisée pour la résolution magnétostatique, le champ source peut être assimilé à celui produit par la bobine dans la boîte $\mathcal{D}_{boi}$ . . . . .	101
2.9	Résultat après annulation de la divergence. <b>Droite</b> : Méthode d'arbre. <b>Gauche</b> : Méthode de minimisation. . . . .	107

2.10	Application aux coudes supérieurs de développantes. <b>Gauche</b> : Méthode d'arbre (Norme maximale tronquée). <b>Droite</b> : Méthode de minimisation (plus lignes de champs du calcul magnétique ayant parfaitement convergé). . . . .	107
3.1	Géométrie et boîte d'air correspondante. . . . .	110
3.2	Deux vues de l'inducteur et des sections servant à construire le champ source. La ligne support $\mathcal{C}_{opt}$ est représentée au centre (rouge). . . . .	111
3.3	Vue du courant imposé dans l'inducteur et des lignes de champs obtenues après résolution magnétique. . . . .	111
3.4	<b>Gauche</b> : géométrie d'une développante. <b>Milieu</b> : résultat produit pour l'annulation de la divergence à l'aide d'une méthode d'arbre. <b>Droite</b> : résultat obtenu avec la méthode de minimisation. . . . .	112
<b>III</b>	<b>Calcul de forces en électromagnétisme</b>	<b>119</b>
1.1	Les valeurs de $(\Phi, \Psi)$ sont les aires hachurées. . . . .	124
2.1	Quart de tétraèdre constituant une partie de la « zone de contrôle » du nœud. . . . .	130
3.1	Détail de la géométrie de la bobine. . . . .	138
3.2	Détail de la géométrie de la barre. . . . .	139
3.3	Détail de la géométrie de la sphère. . . . .	140
3.4	Résultats pour la spire. . . . .	142
3.5	Résultats de calcul pour le cube. . . . .	143
3.6	Résultats de calculs pour la sphère. . . . .	143
<b>IV</b>	<b>Transfert de solution entres maillages déconnectés</b>	<b>147</b>
1.1	Exemple de fonctions produisant la même fonction discrète (ligne brisée noire). La fonction en pointillés possède une dérivée seconde plus grande que la fonction en tirets. . . . .	155

1.2	Exemple unidimensionnel d'une fonction interpolée (en noir) : l'interpolation peut ne plus correspondre à la fonction initiale (en gris).	155
2.1	Détail de l'étape de discrétisation, du transfert direct et du transfert inverse. . . . .	164
2.2	Représentation schématique des deux maillages utilisés pour les tests de transferts. La fonction analytique est initialement discrétisée sur le maillage fin (à gauche) et transférée sur le maillage épars (à droite). La partie centrale de la figure montre la superposition des deux maillages. . . . .	167
2.3	<b>Éléments finis nodaux</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ pour des éléments cibles linéaires. Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{L}^2$ . . . . .	170
2.4	<b>Éléments finis nodaux</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{H}^{grad}_{glob}}^{\%}$ pour la projection orthogonale et des éléments cibles linéaires. Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{H}^{grad}$ . . . . .	171
2.5	<b>Éléments finis d'arêtes</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{L}^2$ . . . . .	173
2.6	<b>Éléments finis d'arêtes</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{H}^{rot}_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{H}^{rot}$ . . . . .	173
2.7	<b>Éléments finis de faces</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{L}^2$ . . . . .	175
2.8	<b>Éléments finis de faces</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{H}^{div}_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{H}^{div}$ . . . . .	175
2.9	<b>Éléments finis de volumes</b> – Évolution de l'erreur $\epsilon_{\mathcal{L}^2_{glob}}^{\%}$ . Transfert et mesure de l'erreur effectués en norme $\mathcal{L}^2$ . . . . .	177
2.10	Évolution de l'erreur pour des subdivisions sucessives des maillages source et cible. Cas des transferts nodaux. . . . .	180
2.11	Évolution de l'erreur pour des subdivisions sucessives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments d'arêtes. . . . .	181
2.12	Évolution de l'erreur pour des subdivisions sucessives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments de faces. . . . .	181



2.13	Évolution de l'erreur pour des subdivisions successives des maillages source et cible. Cas des transferts des éléments de volumes. . . . .	182
2.14	Erreur pour des transferts nodaux en fonction des maillages. Chaque terme matriciel $M_{ij}$ représente l'erreur de projection nodale $\epsilon_{glob.c}^{\%}$ du $i^{\text{ème}}$ maillage vers le $j^{\text{ème}}$ maillage. <b>De gauche à droite</b> : erreur d'interpolation, de projection $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{H}^{grad}$ . . . . .	183
2.15	Erreur de transferts pour les éléments d'arêtes en fonction des maillages. <b>De gauche à droite</b> : erreur d'interpolation, de projection $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{H}^{rot}$ . . . . .	183
2.16	Erreur de transferts pour des éléments de faces en fonction des maillages. <b>De gauche à droite</b> : erreur d'interpolation, de projection $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{H}^{div}$ . . . . .	184
2.17	Erreur pour des transferts d'éléments de volumes en fonction des maillages. . . . .	184
2.18	Exemple schématique de maillage subdivisé. Maillage 1 en bleu et maillage 2 en rouge. Les deux maillages sont basés sur un cube d'arête unitaire. La superposition des maillages est présentée au centre de la figure. . . . .	185
3.1	$D$ représente le signe des trois déterminants issus de deux faces du triangle ABC et du point local P : $D = \{\text{sign}[ABP], \text{sign}[ACP], \text{sign}[BCP]\}$ . Si tous les déterminants sont positifs, alors le point $P$ appartient au triangle. . . . .	189
3.2	Recherche de l'élément contenant le point $P$ : le trajet symbolise la liste des éléments successivement testés. Grâce à la recherche directionnelle, seuls les triangles grisés sont testés. . . . .	191
3.3	Représentation de la méthode par avance frontale sur un cas 2D : les différents niveaux d'éléments testés sont repérés par couleurs. L'algorithme teste en premier les éléments rouge foncé, puis par ordre les éléments rouge clair, gris, bleu clair et enfin bleu foncé. . .	197
3.4	Cas possibles selon le signe de $[ABPQ]$ . <b>Gauche</b> : $[ABPQ]$ négatif ; <b>Droite</b> : $[ABPQ]$ positif. . . . .	200
3.5	Tétraédisation d'une intersection convexe délimitée par un nuage de points. . . . .	203

3.6	Évolution de la norme de l'erreur locale en fonction du critère de nullité $r \epsilon$ où $r$ est un facteur réel et $\epsilon$ est l'epsilon machine. . . . .	204
4.1	Exemple de découpe d'éléments pour un tétraèdre. . . . .	211
4.2	Tracé des variations de la fonction source pour $\alpha$ valant respectivement 1, 4 et 9. . . . .	211
4.3	Tracé des variations de la fonction source pour $\alpha$ valant respectivement 1, 4 et 9. . . . .	212
4.4	Tracé des variations de la fonction source pour $\alpha$ valant respectivement 1, 4 et 9. . . . .	212

## V Application à la modélisation des systèmes 219

1.1	Applications de placements géométriques pour deux pas successifs. Ces applications sont utiles pour déterminer la valeurs d'un champ, à un point donné pour un instant antérieur. . . . .	223
1.2	Schéma temporel complet. . . . .	226
1.3	Exemples de déformées de maillages. L'interpolation du déplacement sur une large zone de l'espace retarde l'apparition d'éléments déformés. . . . .	227
1.4	<b>Gauche</b> : densité de forme déterminée sur les seules parties mécaniques. <b>Droite</b> : exemple de diffusion de la solution dans l'espace environnant. . . . .	229
1.5	<b>Gauche</b> : densité de force après projection en utilisant les restrictions adaptées. <b>Droite</b> : densité de force sans restriction. . . . .	229
1.6	Détail des principales étapes de calcul pour un couplage utilisant le potentiel vecteur magnétique <b>A</b> . . . . .	230
1.7	Exemple de couplage à l'aide du champ magnétique. . . . .	230
1.8	Principales étapes utilisées pour le test du couplage à l'aide de la densité de force. Une étape de détermination de la densité de force est nécessaire, une intégration spatiale est ajoutée afin de comparer les valeurs nodales. . . . .	231
1.9	Détail de la géométrie de la barre. . . . .	232

1.10	Détail pour le cas du conducteur cylindrique dans l'air. . . . .	233
1.11	<b>Gauche</b> : schéma global de couplage. <b>Droite</b> : maillage magnétique (300 000 tétraèdres linéaires). . . . .	236
1.12	<b>Traits plein</b> : déplacement vertical du point $P$ par analyse temporelle. <b>Tirets</b> : Norme de l'induction magnétique au centre du noyau. <b>Traits pointillés</b> : force totale, selon l'axe $z$ , appliquée au noyau de fer. . . . .	237
1.13	Détail des paramètres géométriques pour le cas centré. . . . .	237
1.14	Transformée de Fourier du signal obtenue à partir du cas centré. Les modes 1,2,5,9,10 n'apparaissent pas. . . . .	238
1.15	Détail des paramètres géométriques pour le cas non centré. Le point $P$ est déplacé. . . . .	239
1.16	Tracé partiel de $z = \ u(P) - u_{t_0}(P)\ $ . . . . .	239
1.17	Transformée de Fourier du signal de la figure 1.16 (Le premier pic est tronqué). . . . .	239
1.18	Zoom sur le premier maximum du déplacement. Les lignes en tirets représentent les valeurs obtenues avec la boucle pour les différents pas de temps. En traits plein, résultats sans la boucle. L'axe horizontal est donné en temps réduit. $\Delta$ est choisi pour avoir au moins 30 points par pseudo-période. . . . .	241
1.19	Tracé du déplacement sur toute la durée de la modélisation (cas centré, $\Delta/2$ ). <b>Gauche</b> : pas de boucle interne, un amortissement numérique est constaté. <b>Droite</b> : boucle interne activée, pas d'amortissement constaté. . . . .	241
1.20	Principales étapes utilisées pour le calcul du problème couplé. . . .	245
1.21	Schéma du cas considéré et grandeurs associées. . . . .	246
1.22	<b>Gauche</b> : maillage magnétique avec le conducteur au centre et la boîte d'air. <b>Droite</b> : maillage thermique. . . . .	246
1.23	<b>Gauche</b> : distribution de température obtenue à l'état final par la méthode d'interpolation. <b>Droite</b> : distribution pour les méthodes conservatives locales et de projection orthogonale. . . . .	247

1.24	Étapes du couplage magnéto-thermo-mécanique. Le maillage magnétique est noté 1, le mécanique 2 et le thermique 3. . . . .	248
1.25	<b>Gauche</b> : Distribution des contraintes radiales dans le plan. <b>Droite</b> : Distribution de la température. . . . .	250
1.26	Détail et paramètres du bilame modélisé. . . . .	252
1.27	<b>Trait plein</b> : température au centre du bilame (avec mouvement). <b>Tirets</b> : tracé de la température pour le cas sans mouvement. . . .	254
1.28	Tracé du déplacement vertical du point $P$ (voir la figure 1.26). . . .	254
1.29	<b>Trait plein</b> : tracé de la différence normalisée entre la température réelle et la courbe exponentielle (cherchée au sens des moindres carrés) <b>Tirets</b> : valeur normalisée du déplacement, on observe bien le déphasage de $\pi/2$ . . . . .	255
1.30	Résultat de calcul pour une extrémité d'alternateur à angle interne nul. Le rotor est pris en compte et alimenté. . . . .	261
1.31	Tracé des déplacements des développantes à l'issu du calcul de mécanique. Pour ce cas, le mode 4 est prépondérant. . . . .	262

## ANNEXES

A.1	Exemples de répartitions des contraintes totales pour le coude supérieur de la développante. <b>Gauche</b> : Résolution électrocinétique (voir figure 1.4). <b>Droite</b> : Courant source uniforme. . . . .	266
C.1	Energie et coénergie pour la première expression. . . . .	278
C.2	Energie et coénergie pour la deuxième expression. . . . .	279
C.3	Représentation de la distribution de force pour la formulation électrique. <b>Gauche</b> : Forces calculées à partir de l'expression 1. <b>Droite</b> : Forces issues de l'expression 2. . . . .	281
C.4	Représentation de la distribution de force pour la formulation magnétique. <b>Gauche</b> : Forces calculées à partir de l'expression 1. <b>Droite</b> : Forces issues de l'expression 2. . . . .	281

C.5	Représentation des déformées pour un aimant. <b>De gauche à droite :</b> Formulation électrique–expression 1, formulation électrique–expression 2, formulation magnétique–expression 1, formulation magnétique– expression 2. . . . .	282
D.1	Application de la méthode de l'image à un inducteur courbé. Des lignes de champs sont tracées : elles coupent le plan de symétrie orthogonalement à celui-ci. . . . .	284
D.2	Déformations au sein de la structure ( $\times 10^8$ ), la surface est colorée par la norme de Frobenius du tenseur des contraintes. La différence relative en norme entre les deux méthodes est de 7%. <b>Gauche :</b> Méthode Éléments Finis. <b>Droite :</b> Modèle purement analytique. . .	284
E.1	Energie et coénergie pour la première expression. . . . .	287
E.2	Energie et coénergie pour la deuxième expression. . . . .	290
F.1	Exemple unidimensionnel d'oscillations. La fonction source en bleu est discrétisée sur les intervalles $n, n = -5 \dots 5$ et la fonction cible est discrétisée par intervalles $n/3, n = -15 \dots 15$ . . . . .	293
F.2	Géométrie du problème composé de deux cubes concentriques d'arêtes respectives 2 (en bleu, dont seule la demie partie inférieure est repré- sentée) et 1 (en rose). . . . .	294
F.3	Cubes concentriques – Résultat des projections $\mathcal{L}^2$ (à gauche) et $\mathcal{H}^{grad}$ avec une constante de Sobolev de $2.10^{-3}$ (au centre) et $2.10^{-2}$ (à droite). . . . .	295
F.4	Effet d'échelle de la constante de Sobolev. Maillages respectivement à l'échelle 100 (a, d), 1 (b, e) et $1/100$ (c, f). Les deux figures du centre (b, e) reprennent le cas test de la partie F.1. <b>1<sup>ère</sup> ligne (a, b, c) :</b> constante de Sobolev égale à $2.10^{-3}$ . <b>2<sup>ème</sup> ligne (d, e, f) :</b> $\alpha$ valant $2.10^1$ , $2.10^{-3}$ et $2.10^{-7}$ , respectivement pour d, e et f. . . . .	296

# Liste des tableaux

<b>II</b>	<b>Prise en compte des inducteurs bobinés de géométrie complexe</b>	<b>71</b>
1.1	Temps de calcul des sections optimales et temps total (construction des sections et détermination du champ) en fonction du nombre de mailles. . . . .	88
<b>III</b>	<b>Calcul de forces en électromagnétisme</b>	<b>119</b>
3.1	Détail des paramètres du cas test d'une spire circulaire à section carrée. . . . .	139
3.2	Détail des paramètres pour le cas test de la barre. Les entiers $n$ et $p$ représentent le nombre de termes considérés dans la série. . . . .	140
3.3	Paramètres utilisés pour le cas de la sphère. . . . .	141
<b>IV</b>	<b>Transfert de solution entre maillages déconnectés</b>	<b>147</b>
2.1	<b>Éléments finis nœuds</b> – Valeurs de $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique (éléments linéaires). . . . .	168
2.2	<b>Éléments finis nœuds</b> – Valeurs de $\epsilon_{glob}^{\%}$ et $\epsilon_{consv.}^{\%}$ pour des éléments cibles linéaires. . . . .	169
2.3	<b>Éléments finis d'arêtes</b> – Valeurs de $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique. . . . .	172
2.4	<b>Éléments finis d'arêtes</b> – Valeurs de $\epsilon_{glob}^{\%}$ et $\epsilon_{consv.}^{\%}$ . . . . .	172

2.5	<b>Éléments finis de faces</b> – Valeurs de $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique. . . . .	174
2.6	<b>Éléments finis de faces</b> – Valeurs de $\epsilon_{glob.}^{\%}$ et $\epsilon_{consv.}^{\%}$ . . . . .	176
2.7	<b>Éléments finis de volumes</b> – Valeurs de $\epsilon_{discr.}^{\%}$ , l'erreur de discrétisation de la fonction analytique. . . . .	177
2.8	<b>Éléments finis de volumes</b> – Valeurs de $\epsilon_{glob.}^{\%}$ et $\epsilon_{consv.}^{\%}$ . . . . .	177
2.9	Caractéristiques des différents maillages issues de subdivisions successives des différents éléments en huit autres. . . . .	180
2.10	Nombre d'éléments pour chacun des différents maillages utilisés (numérotés de 1 à 32). . . . .	182
2.11	Valeurs de $\epsilon_{glob.c}^{\%}$ et $\epsilon_{glob.s}^{\%}$ pour des éléments nodaux dans le cas de maillages subdivisés. . . . .	185
3.1	Temps de calcul en fonction de la taille de la grille cartésienne. Le test a été réalisé sur une machine ne possédant pas d'horloge monotone, la résolution en temps est donc la seconde. . . . .	193
3.2	Complexité comparée des différentes étapes pour le transfert de solutions. $M$ et $N$ représentent respectivement la taille des maillages cible et source. . . . .	205
4.1	Évolution de l'erreur en fonction du nombre de points de Gauss utilisés pour la quadrature. . . . .	209
4.2	Évolution de l'erreur à maillage fixé. Le nombre moyen d'éléments finaux pour un élément réel du maillage cible est également indiqué (découpe). . . . .	211
4.3	Temps de calcul pour chacune des méthodes, pour une exécution séquentielle du programme. . . . .	213
4.4	Temps de calcul en fonction du nombre de cœurs. . . . .	213

## V Application à la modélisation des systèmes 219

1.1	Test des différentes possibilités de couplage pour l'exemple de la barre.	234
-----	---	-----

1.2	Test des différentes possibilités de couplage pour l'exemple du conducteur cylindrique. . . . .	235
1.3	Tableau de valeurs des grandeurs physiques utilisées. . . . .	238
1.4	Tableau des fréquences des dix premiers modes de la plaque, calculés à l'aide des méthodes spectrale et de transformée de Fourier (T.F.).	238
1.5	Comparaison de l'erreur et du temps de calcul pour différentes valeurs du pas de temps. <b>Colonne gauche</b> : sans la boucle interne (S.B.) ; <b>Colonne droite</b> : avec la boucle (B.). . . . .	240
1.6	Paramètres utilisés pour le problème magnéto-thermique. . . . .	245
1.7	Erreurs sur les températures pour les différentes méthodes. . . . .	247
1.8	Paramètres utilisés, et valeurs associées, pour le cas test analytique.	249
1.9	Test de précision pour le couplage magnéto-thermo-mécanique. . . .	250
1.10	Paramètres géométriques du système. Les distances sont données en mètres. . . . .	252
1.11	Paramètres physiques du bilame. . . . .	252

## ANNEXES

## 265

C.1	Paramètres utilisés pour le cas des deux aimants séparés. . . . .	280
C.2	Force totale appliquée sur l'aimant supérieur pour les deux formulation magnétiques et les deux définitions possibles de l'énergie.. . .	280





# Liste des Algorithmes

## II Prise en compte des inducteurs bobinés de géométrie complexe 71

- 1.1 Algorithme de correction des normes, exemple pour des tétraèdres. . . 81
- 1.2 Traitement des cas dégénérés pour l'algorithme de correction des normes. . . . . 82
- 1.3 Algorithme du gradient pour la recherche des sections. . . . . 86
- 2.1 Algorithme de correction des normes, exemple pour des tétraèdres. . 106

## IV Transfert de solution entres maillages déconnectés 147

- 3.1 Algorithme de localisation des points. . . . . 190
- 3.2 Création des listes de connectivités pour les arêtes et les faces. . . . 192
- 3.3 Algorithme permettant de déterminer les points d'intersection avec un coût minimal. . . . . 196
- 3.4 Calcul des intersections entre deux faces. **Étape 1** : Détermination de l'intersection effective des faces avec le plan support opposé. Si nécessaire, préparation de l'étape 2. . . . . 198
- 3.5 Calcul des intersections entre deux faces. **Étape 2** : Détermination des positions relatives et calcul effectif des points d'intersections. . . 199
- 3.6 Procédure permettant d'obtenir un pavage tétraédrique de l'intersection. . . . . 202

4.1	Algorithme d'intégration adaptative (exemple utilisant une quadrature à 4 et 5 points). . . . .	210
-----	---	-----

# Liste des abréviations utilisées

ABRÉVIATION	SIGNIFICATION
ARQS	Approximation des régimes quasi stationnaires
CPU	<i>Central processing unit</i> : unité centrale de traitement
CSR	<i>Computer Sparse Row</i>
DdL	Degrés de liberté
FIT	<i>Finite Integration Technique</i>
IRAM	<i>Implicit Restarted Arnoldi Method</i>
u.a.	Unités arbitraires



# BIBLIOGRAPHIE



- ALBANESE, R. et G. RUBINACCI (1990). « Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29.3, p. 515–532.
- ALBRECHT Cord an Kummeth, Peter et Peter MASSEK (avr. 2004). *Fully transposed high tc composite superconductor, method for producing the same and its use*.
- ARONSON, E.A. et John R. BRAUER (1989). « Magnetic torque or force calculation by direct differentiation of finite element coenergy ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 25.5, p. 3578–3580.
- BADICS, Z. et Z.J. CENDES (2007). « Source Field Modeling by Mesh Incidence Matrices ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 43.4, p. 1241–1244.
- BASTOS, J. P. A., M.F.R.R. CABREIRA, N. SADOWSKI, S.R. ARRUDA et S. L. NAU (1997). « A thermal analysis of induction motors using a weak coupled modeling ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 33.2, p. 1714–1717.
- BASTOS, J. P. A., N. SADOWSKI et R. CARLSON (1990). « A modeling approach of a coupled problem between electrical current and its thermal effects ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 26.2, p. 536–539.
- BERNARDI, C., Y. MADAY et A.T. PATERA (1993). « Domain Decomposition by the Mortar Element Method ». *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*. Sous la dir. d'HansG. KAPER, Marc GARBEY et GailW. PIEPER. T. 384. NATO ASI Series. Springer Netherlands, p. 269–286.
- BESBES, M. (1995). « Contribution à la modélisation numérique des phénomènes couples magneto-élastiques : Application à l'étude des vibrations d'origine magnétique dans les MRV ». Thèse de doct. Université Paris 6.
- BESBES, M., B. IONESCO, Z. REN et A. RAZEK (1995). « Study of Magnetoelastic Problems by Strong Coupling Model ». Sous la dir. d'André NICOLET et R. BELMANS, p. 103–106.
- BESBES, M., Z. REN et A. RAZEK (1996). « Finite element analysis of magneto-mechanical coupled phenomena in magnetostrictive materials ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 32.3, p. 1058–1061.
- BOSSAVIT, A. (1991). « Differential Forms and the Computation of Fields and Forces in Electromagnetism ». *European Journal of Mechanics B-Fluids* 10.5, 474–488.
- (1992). « On local computation of the electromagnetic force field in deformable bodies ». *Int. J. Applied Electromagnetics in Materials* 2.4, p. 333–343.
- (1993). *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*. Mathematics and Its Applications Series. Springer.
- (2003). *A course in Convex Analysis*. Rap. tech. Warsaw University.
- (2004). « Forces inside a magnet ». *International Compumag Society Newsletter* 11, p. 4–12.



- BOSSAVIT, A. (2007). « Complementarity bilateral bounds on forces in magnet systems ». *Compel-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 26.4, 932–940.
- (2008). « Force-Related Nuts and Bolts in the Discretization Toolkit for Electromagnetics ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 44.6, p. 1158–1161.
- (2010). « Discrete Magneto-Elasticity : A Geometrical Approach ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 46.8, p. 3485–3491.
- (2011). « Virtual power principle and Maxwell’s tensor : which comes first ? » *COMPEL : The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 30.6, p. 1804–1814.
- BOSSAVIT, A., F. BURET, V. MAZAURIC, G. MEUNIER et L. NICOLAS (2003). *Champs et équations en électromagnétisme - Électromagnétisme et éléments finis 1*. Hermes / Lavoisier.
- BOSSAVIT, A. et L. KETTUNEN (2000). « Yee-like schemes on staggered cellular grids : a synthesis between FIT and FEM approaches ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 36.4, p. 861–867.
- BOSSAVIT, A. et I.D. MAYERGOYZ (1998). *Computational Electromagnetism : Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*. Electromagnetism. Elsevier Science.
- BOUILLAUT, F. (1991). « Contribution à la modélisation numérique de systèmes électromagnétiques régis par les équations de la magnétodynamique ». Thèse de doct. Université Paris Sud.
- CAI, X. C. (1995). « The use of pointwise interpolation in domain decomposition methods with non-nested meshes ». *IAM J. Sci. Comput.* 16.1, p. 250–256.
- CHANG, Z. (2002). « Source Field Modeling by Mesh Incidence Matrices ». *Magnetics, IEEE Transactions on*.
- CLEMENT, Ph. (1975). « Approximation by finite element functions using local regularization. » *NUMDAM : Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique* 9.2, p. 77–84.
- COOLS, R. et A. HAEGEMANS (sept. 2003). « Algorithm 824 : CUBPACK : a package for automatic cubature ; framework description ». *ACM Trans. Math. Softw.* 29.3, p. 287–296.
- CORMEN, T. H., C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST et C. STEIN (2009). *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. The MIT Press.
- COULOMB, J.-L (1983). « A methodology for the determination of global electro-mechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 19.6, p. 2514–2519.
- COULOMB, J.-L. et G. MEUNIER (1984). « Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 20.5, p. 1894–1896.

- CRUTZEN, Y., S. PAPADOPOULOS, F. VAN PAEMEL et N. RICHARD (1994). « Modelling, analysis and validation of electromagnetic-mechanical coupling on clean test pieces ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 30.5, p. 3276–3279.
- DELAERE, K., P. SAS, R. BELMANS et K. HAMEYER (1999). « Weak coupling of magnetic and vibrational analysis using local forces ». *Electric Machines and Drives, 1999. International Conference IEMD '99*, p. 514–516.
- DHIA, Hashmi Ben et Guillaume RATEAU (2005). « The Arlequin method as a flexible engineering design tool ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62.11, p. 1442–1462.
- DONCKER, E. de, P. EALY et A. GUPTA (1996). « Finite element applications of parallel adaptive integration strategies ». *High Performance Computing, 1996. Proceedings. 3rd International Conference on*, p. 100–105.
- DULAR, P. (1994). « Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires ». Thèse de doct. Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées.
- DYCK, D.N. et J.P. WEBB (2004). « Solenoidal current flows for filamentary conductors ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 40.2, p. 810–813.
- ERN, A. (2005). *Aide-mémoire des éléments finis*. Sciences et Techniques. Dunod.
- FONG, D. et M. SAUNDERS (2011). « LSMR : An Iterative Algorithm for Sparse Least-Squares Problems ». *SIAM Journal on Scientific Computing* 33.5, p. 2950–2971.
- FOURNET, Gérard (1993). « Électromagnétisme ». *Techniques de l'ingénieur Électromagnétisme pour le génie électrique*.
- GENZ, Alan et Ronald COOLS (1997). *An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices*. Rap. tech.
- GEUZAIN, C., B. MEYS, F. HENROTTE, P. DULAR et W. LEGROS (1999). « A Galerkin projection method for mixed finite elements ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 35.3, p. 1438–1441.
- GYIMESI, M., D. LAVERS, T. PAWLAK et D. OSTERGAARD (1993). « Biot-Savart integration for bars and arcs ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 29.6, p. 2389–2391.
- HAMDI, E.S., A. F. LICARIAO-NOGUEIRA et P.P. SILVESTER (1993). « Torque computation by mean and difference potentials (PM motors) ». *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings A* 140.2, p. 151–154.
- HAMEYER, K., J. DRIESEN, H. DE GERSEM et R. BELMANS (1999). « The classification of coupled field problems ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 35.3, p. 1618–1621.
- HEATH, Michael T. (1996). *Scientific Computing : An Introductory Survey*. Sous la dir. d'Eric M. MUNSON. 2nd. McGraw-Hill Higher Education.
- HENNERON, T. (2004). « Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme résolu avec la Méthode des Eléments Finis ». Thèse de doct. Université Lille I.

- JIAO, Xiangmin et Michael T. HEATH (2004). « Common-refinement-based data transfer between nonmatching meshes in multiphysics simulations ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61, p. 2402–2427.
- JOURNEAUX, A. (juin 2010). *Modélisation de cages de développantes, calcul analytique*. Rap. tech. EDF R&D.
- KABASHIMA, T., A. KAWAHARA et T. GOTO (1988). « Force calculation using magnetizing currents ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 24.1, p. 451–454.
- KETTUNEN, L., K. FORSMAN et A. BOSSAVIT. « Discrete spaces for div and curl-free fields ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 34.5, p. 2551–2554.
- KOTIUGA, P. R. (1984). « Hodge Decompositions and Computational Electromagnetics ». Thèse de doct. McGill University.
- KOVANEN, T., T. TARHASAARI et L. KETTUNEN (2011). « Computation of Local Electromagnetic Force ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 47.5, p. 894–897.
- LAMBRECHT, D. (1986). « The Turbogenerator, Evolution – Status – Progress ». *International Conference on Electrical Machines, Proceedings*.
- LAWRENSEN, P.J. (déc. 1961). « The magnetic field of the end-windings of turbo-generators ». *Proceedings of the IEE - Part A : Power Engineering* 108.42, p. 538–549.
- LEFEVRE (2007). *Quelques rappels de topologie sur un espace métrique*. URL : [www.cmap.polytechnique.fr/~lefebvre/SEMESTRE\\_EV2/Cours2.pdf](http://www.cmap.polytechnique.fr/~lefebvre/SEMESTRE_EV2/Cours2.pdf).
- LE MENACH, Y. (1999). « Contribution A La Modelisation Numérique Tridimensionnelle Des Systèmes Électrotechniques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Technologies de Lille.
- LÉVY, T. (2005). « Électromagnétisme et formes différentielles, vers la relativité restreinte ». *CultureMATH*.
- (2009). *Holonomie aléatoire, grandes matrices unitaires*. Rap. tech. Université Paris Sud.
- MASSE, Ph, B. MOREL et Th BREVILLE (1985). « A finite element prediction correction scheme for magneto-thermal coupled problem during curie transition ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 21.5, p. 1871–1873.
- McFEE, S. (1997). « h-p adaptive numerical integration techniques for finite element analysis in magnetics ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 33.5, p. 4116–4118.
- MEDEIROS, L.H. de, G. REYNE et G. MEUNIER (2000). « A unique distribution of forces in permanent magnets using scalar and vector potential formulations ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 36.5, p. 3345–3348.
- MEDEIROS, L.H. de, G. REYNE, G. MEUNIER et J.-P. YONNET (1998). « Distribution of electromagnetic force in permanent magnets ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 34.5, p. 3012–3015.
- MOLFINO, P. et M. REPETTO (1989). « Fully coupled ‘quasi-axisymmetric’ magneto-thermal model for skin effects analysis in resistive Tokamak coils ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 25.5, p. 3940–3942.

- MOON, F.C. (1984). *Magneto-solid mechanics*. Wiley-Interscience publication. Wiley.
- MOREAU, O. (2012). *Note de principe de Code\_Carmel3D*. Rap. tech. EDF R&D.
- NÉDÉLEC, J.C. (1986). « A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$  ». *Numerische Mathematik* 50.1, p. 57–81. ISSN : 0029-599X.
- NICOLET, A., A. GENON, W. LEGROS, M. UMÉ et F. DELINCÉ (1992). « An optimal adaptative numerical integration method ». *Albuquerque, USA, Boundary Element Technology VII*, p. 919–933.
- PAIGE, Christopher C. et Michael A. SAUNDERS (mar. 1982). « LSQR : An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares ». *ACM Trans. Math. Softw.* 8.1, p. 43–71.
- PAULIN, F. (2007). *Géométrie différentielle élémentaire*. URL : [http://www.math.unpsud.fr/paulin/notescours/liste\\_notescours.html](http://www.math.unpsud.fr/paulin/notescours/liste_notescours.html).
- PELLEREY, P., V. LANFRANCHI et G. FRIEDRICH (2012). « Coupled Numerical Simulation Between Electromagnetic and Structural Models. Influence of the Supply Harmonics for Synchronous Machine Vibrations ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 48.2, p. 983–986.
- PIERQUIN, A., Y. LE MENACH, J.-Y. ROGER et L. CHEVALLIER (2012). « Imposition d'un courant uniforme dans un conducteur ». *Numelec 2012, Marseille*, 7.
- RAINER, S., O. BIRO, B. WEILHARTER et A. STERMECKI (2010). « Weak Coupling Between Electromagnetic and Structural Models for Electrical Machines ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 46.8, p. 2807–2810.
- RAPETTI, F. (2000). « Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints ». Thèse de doct. Université Paris 6.
- RAVIART, P.A. et J.M. THOMAS (1977). « A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems ». *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*. Sous la dir. d'Ilio GALLIGANI et Enrico MAGENES. T. 606. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, p. 292–315.
- REN, Z. (1994). « Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 30.5, p. 3471–3474.
- (1996). « Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 32.3, p. 655–658.
- (1997). *Contribution à la modélisation des systèmes électriques tridimensionnels*. Rap. tech. Université Paris Sud.
- REN, Z., B. IONESCU, M. BESBES et A. RAZEK (1995). « Calculation of mechanical deformation of magnetic materials in electromagnetic devices ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 31.3, p. 1873–1876.
- REN, Z. et A. RAZEK (1990). « A coupled electromagnetic-mechanical model for thin conductive plate deflection analysis ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 26.5, p. 1650–1652.

- REN, Z. et A. RAZEK (1992). « Local force computation in deformable bodies using edge elements ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 28.2, p. 1212–1215.
- (1994). « Permanent magnet modelling by edge element and facet element (discussion on the force distribution in permanent magnet) ». *Computation in Electromagnetics, 1994. Second International Conference on*, p. 154–157.
- RICHARD, N. et J.-P. DUCREUX (1997). *Pastille diélectrique avec échange convectif*. EDF R&D.
- ROBINSON, F.N.H. (1973). *Macroscopic electromagnetism*. International series of monographs in natural philosophy. Pergamon Press.
- SAAD, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. Society for Industrial et Applied Mathematics.
- SADOWSKI, N., Y. LEFÈVRE, M. LAJOIE-MAZENC et J. P. A. BASTOS.
- SCHMIDT, E. (2011). « Finite element analysis of electrical machines and transformers State of the art and future trends ». *Compel-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 30.6, 1899–1913.
- SCHMIDT, E. et C. GRABNER (2005). « Application of a weak coupling algorithm in the electromagnetic-mechanical finite-element analysis for Roebel bars of large synchronous machines ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 41.5, p. 1896–1899.
- TAFERGUENIT, M. (2003). « Modélisation Couplée Électrique - Magnétique - Mécanique d'un Convertisseur Électromagnétique : Application à une Machine à Courant Continu à Aimants ». Thèse de doct. Université Paris Sud.
- TARHASAARI, T., L. KETTUNEN et A. BOSSAVIT (1999). « Some realizations of a discrete Hodge operator : a reinterpretation of finite element techniques [for EM field analysis] ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 35.3, p. 1494–1497.
- TROWBRIDGE, C. W. (1988). « Electromagnetic computing : the way ahead ? » *Magnetics, IEEE Transactions on* 24.1, p. 13–18.
- TSUKERMAN, I.A. (1992). « Overlapping finite elements for problems with movement ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 28.5, p. 2247–2249.
- URANKAR, L. (sept. 1980). « Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part I : Filament approximation ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 16.5, p. 1283–1288.
- (nov. 1982a). « Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part III : Exact computation for rectangular cross section ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 18.6, p. 1860–1867.
- (mai 1982b). « Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part II : Thin sheet approximation ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 18.3, p. 911–917.
- VANDEVELDE, L. et J.A.A. MELKEBEEK (2001). « A survey of magnetic force distributions based on different magnetization models and on the virtual work principle ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 37.5, p. 3405–3409.

- VOISIN, M. (2000). « Contribution à la modélisation tridimensionnelle des phénomènes transitoires couplés magnétique mécanique ». Thèse de doct. Université de Paris 11, Orsay.
- WANG, Z., T. HENNERON, N. NEMITZ, J.-C. MIPO et F. PIRIOU (2013). « Electromagnetic Field Projection on Finite Element Overlapping Domains ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 49.4, p. 1290–1298.
- WIGNALL, A. N., A. J. GILBERT et S.J. YANG (1988). « Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the Maxwell stress method ». *Magnetics, IEEE Transactions on* 24.1, p. 459–462.
- YOUNSI, Karim, David A. SNOPEK, Luc LAFORTUNE, Jeff D. SHEAFFER et Mark MISCHLER William R. aand Markovitz (juil. 2004). *Method of making a dynamoelectric machine conductor bar and method of making a conductor bar dynamoelectric machine, the bar and the machine*.
- YUAN, K (1972). « Magneto-Thermo-Elastic Stresses In An Infinitely Long Cylindrical Conductor Carrying A Uniformly Distributed Axial Current ». *Applied Scientific Research* 26.3-4, 307–&.